

Geometriai versenyfeladatok 7-8. osztályosoknak
Károlyi Károly, Bátaszék

1. feladat

Az $ABCD$ négyzet AC átlóján lévő P pontra igaz, hogy $AP = AB$. A BC oldalon lévő Q pontra igaz, hogy PQ merőleges AC -re. Igazoljuk, hogy a PC , PQ , BQ szakaszok egyenlők!

Megoldás:

$$AP = AB \text{ és } \angle PAB = 45^\circ,$$

ezért

$$\angle ABP = \angle BPA = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ.$$

$$\angle QPB = \angle QPA - \angle BPA = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$$

valamint

$$\angle PBQ = \angle ABQ - \angle ABP = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ,$$

így PBQ háromszög egyenlő szárú, azaz $BQ = PQ$.

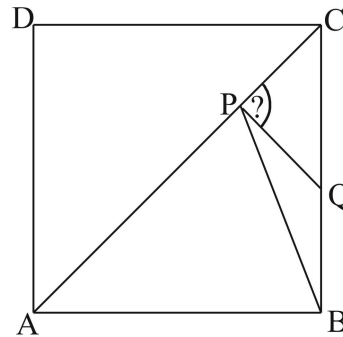
$$\angle QCP = 45^\circ \text{ és } \angle CPQ = 90^\circ,$$

ezért

$$\angle PQC = 45^\circ,$$

így a PQC háromszög egyenlő szárú, azaz $PC = PQ$.

$$PC = PQ \text{ és } BQ = PQ, \text{ így } PC = PQ = BQ.$$



2. feladat

Adott az $ABCD$ rombusz. Hány fokok szöget zárnak be a BAC és BDC szögek szögfelezői?

Megoldás:

Legyen $BAD\angle = \alpha$ és a kérdéses szögfelezők metszés pontja M ! Ekkor $ADC\angle = 180^\circ - \alpha$.

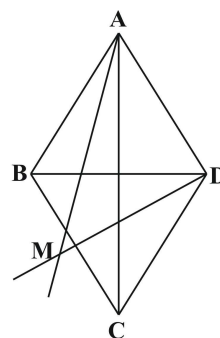
Tudjuk, hogy a rombusz átlói felezik a szögeket, így

$$MAD\angle = \frac{3}{4}\alpha \text{ és } ADM\angle = \frac{3}{4}(180^\circ - \alpha)$$

Ezekből következik, hogy

$$\begin{aligned} AMD\angle &= 180^\circ - MAD\angle - ADM\angle = \\ &= 180^\circ - \frac{3}{4}\alpha - \frac{3}{4}(180^\circ - \alpha) = 45^\circ \end{aligned}$$

Tehát a BAC és BDC szögek szögfelezői 45° -os szöget zárnak be.



3. feladat

Egy 60-os középponti szögű körcikk területe 100 cm^2 . Mekkora annak a körcikkbe írható körnek a területe, amely érinti a körcikk két határoló sugarát és a körívét is?

Megoldás:

A beírt kör a körívet P -ben érinti. A szimmetria miatt CP felezi a középponti szöget és O rajta van CP -n

Mivel a sugár merőleges az érintőre, ezért CEO háromszög szögei 30° , 60° és 90° , azaz a háromszög egy szabályos háromszög „fele”.

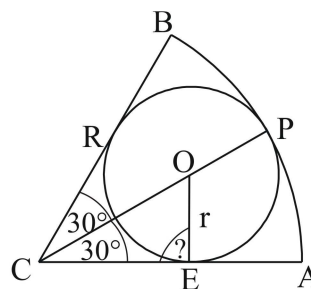
Így $CO = 2r$.

Ebből következik, hogy $R = CO + OP = 3r$.

A körcikk területe:

$$T = \frac{R^2 \cdot \pi}{6} = \frac{9r^2 \cdot \pi}{6} = 100 \text{ cm}^2.$$

Tehát a beírt kör területe: $t = r^2 \cdot \pi = \frac{6}{9} \cdot 100 \text{ cm}^2 = \frac{200}{3} \text{ cm}^2$.



4. feladat

Az ABC háromszögben BM súlyvonal fele az AB oldalnak, valamint az $ABM \angle = 40^\circ$. Határozzuk meg az ABC szöget!

Megoldás:

Tükrözzük a háromszöget az M pontra!

Jelölje a B csúcs tükörképét D !

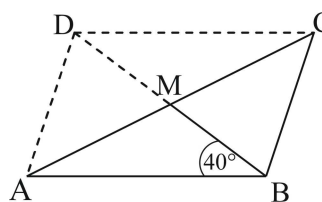
A tükrözés miatt, $DB = 2 \cdot BM$, a feltétel miatt $AB = 2 \cdot BM$. Így $AB = DB$, azaz ABD háromszög egyenlő szárú.

Ebből következik, hogy

$$DAB \angle = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ.$$

A tükrözésnél keletkezett $ABCD$ négyszög paralelogramma, így

$$ABC \angle = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$



5. feladat

Az ABC derékszögű háromszögben $\alpha = 30^\circ$, az AB átfogó felezőmerőlegese az AC befogót K -ban metszi. Milyen arányban osztja K az AC befogót?

Megoldás:

Az AB felezőpontját jelölje F !

$$FKA \angle = 180^\circ - KAF \angle - AFK \angle = 60^\circ$$

és

$$ABC \angle = 180^\circ - BCA \angle - CAB \angle = 60^\circ.$$

Az AFK derékszögű háromszög az ALK szabályos háromszög „fele”, ezért $AK = 2FK$. ABC derékszögű háromszög az ABD szabályos háromszög „fele”, így

$$CB = \frac{1}{2} AB = FB. \text{ Emiatt } FBC \text{ háromszög}$$

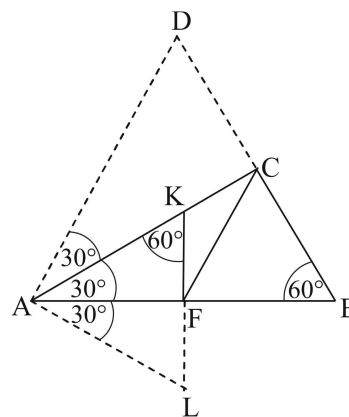
szabályos, azaz $BCF \angle = CFB \angle = 60^\circ$.

Ebből

$$KFC \angle = KFB \angle - CFB \angle = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

és

$$FCK = BCK \angle - BCF \angle = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$



Következésképpen a CKF háromszög egyenlő szárú, azaz $KC = FK$. Tehát $AK = 2FK = 2KC$, azaz a K pont 2:1 arányban osztja AC -t.

6. feladat

Az ABC háromszögben az $ABC\angle = 30^\circ$, a $CAB\angle = 45^\circ$ és M a BC oldal felezőpontja. Határozd meg az AMC szög nagyságát!

Megoldás:

A C -ből az AB -re állított merőleges talppontja K .

Az AKC háromszög egyik szöge 45° , a másik 90° , akkor a harmadik szöge $180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$, így a háromszög egyenlő szárú, azaz $AK = KC$.

A KBC háromszög egyik szöge 30° -os, a másik 90° -os, a harmadik $180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ -os, így ez egy „fél” szabályos háromszög. Ebből következik, hogy $BC = 2 \cdot KC$. Mivel M felező-pontja BC -nek, ezért $KC = MC$. Így a KMC háromszög egyenlő szárú és a szárszöge 60° , tehát egyenlő oldalú.

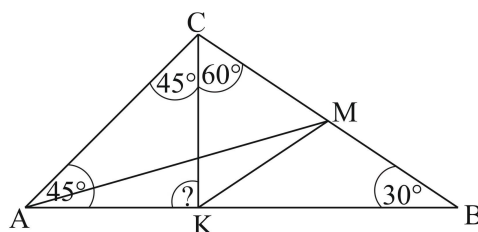
Ebből következik, hogy $KC = KM$, valamint $CKM\angle = KMC\angle = 60^\circ$.

Mivel $AK = KC$ és $KC = KM$, ezért $AK = KM$, azaz AKM háromszög egyenlő szárú és a szárszöge

$$AKM\angle = AKC\angle + CKM\angle = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

Így $KMA\angle = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$.

Tehát $AMC\angle = KMC\angle - KMA\angle = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.

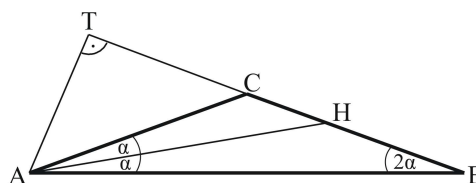


7. feladat

Az ABC háromszögre igaz, hogy $AC = BC$. Az A csúcsához tartozó magasságvonal T -ben, a belső szögfelező pedig H -ban metszi a BC oldalegyenesét. Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit, ha tudjuk, hogy AT fele olyan hosszú, mint AH !

Megoldás:

A magasságvonal merőleges az oldalegyenes-re, így AHT derékszögű háromszög. A feltétel szerint AT befogó fele olyan hosszú, mint AH átfogó, így AHT egy „fél” szabályos háromszög.



Emiatt $TAH\angle = 60^\circ$ és $AHT\angle = 30^\circ$.

Legyen $CAB\angle = 2\alpha$! Mivel $AC = BC$, ezért $ABC\angle = CAB\angle = 2\alpha$. Az AH szögfelező, ezért $HAB\angle = \alpha$. Az $AHT\angle$ külső szöge az ABH háromszögnek, így

$$AHT\angle = HAB\angle + ABH\angle = \alpha + 2\alpha = 3\alpha.$$

Mivel $AHT\angle = 30^\circ$, ezért $\alpha = 10^\circ$.

Tehát $CAB\angle = ABH\angle = 2\alpha = 20^\circ$ és $BCA\angle = 180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ$.

Megjegyzés:

Ha T a BC oldal belső pontja lenne, akkor az A csúcsnál lévő belső szög fele nagyobb lenne 60° -osnál, azaz A -nál és B -nél is tompaszögek lennének, ami nem lehetséges.

8. feladat

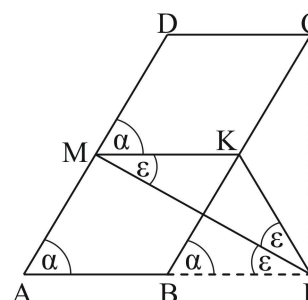
Az $ABCD$ paralelogramma BC oldala kétszerese a CD oldalnak. M az AD oldal felezőpontja. A C pontból merőlegest állítunk az AB oldal egyenesére. A merőleges az oldalegyenest P pontban metszi. Igazoljuk, hogy DMP szög háromszorosa az APM szögnek!

Megoldás:

Legyen $DAB\angle = \alpha$, $APM\angle = \varepsilon$ és BC oldal felezőpontja K ! A felezőpontokat összekötő MK szakasz a paralelogramma középvonala, így MK párhuzamos AB -vel, illetve AP -vel. Ebből következik, hogy

$DMK\angle = DAB\angle = \alpha$ (egyállású szögek) és $KMP\angle = APM\angle = \varepsilon$ (váltószögek).

A középvonal hossza egyenlő a párhuzamos



oldal hosszával, így $MK = AB = a$. A feltétel szerint, pedig $KB = a$ is fennáll. Mivel BPC háromszög derékszögű, ezért Thalész tételének megfordítása miatt a BC átfogó K felezőpontja a háromszög köré írható körének középpontja.

Ebből következik, hogy $KB = KP = KC = a$.

Mivel $MK = KP = a$, ezért MPK egyenlő szárú háromszög.

Így $MPK\angle = KMP\angle = \varepsilon$. $KBP\angle = DAB\angle = \alpha$, mert egyállású szögek.

A BPK háromszög szintén egyenlő szárú, mert $KB = KP = a$. Ebből következik, hogy

$$KBP\angle = BPK\angle = APM\angle + MPK\angle,$$

azaz

$$\alpha = 2\varepsilon.$$

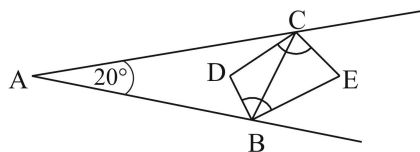
Ezt felhasználva

$$DMP\angle = DMK\angle + KMP\angle = \alpha + \varepsilon = 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Tehát DMP szög háromszorosa az APM szögnek.

9. feladat

Az ABC háromszögben $BAC\angle = 20^\circ$, a B -nél és C -nél lévő szögek belső szögfelezői a D pontban, külső szögfelezői pedig az E pontban metszik egymást. Számítsuk ki a $BECD$ négyszög belső szögeinek nagyságát!



Megoldás:

$$CDB\angle = 180^\circ - DBC\angle - BCD\angle = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} =$$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{20^\circ}{2} = 100^\circ$$

$$DBE\angle = DBC\angle + CBE\angle = \frac{\beta}{2} + \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ$$

és

$$ECD\angle = BCD\angle + ECB\angle = \frac{\gamma}{2} + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ,$$

ezekből

$$BEC\angle = 360^\circ - 100^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 80^\circ.$$

Tehát a $BECD$ négyszög belső szögeinek nagysága: $100^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 80^\circ$.

10. feladat

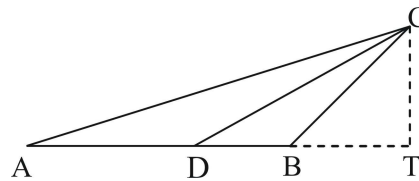
A háromszög egyik szöge 120° -kal nagyobb a másiknál. Igazoljuk, hogy a háromszög harmadik csúcsából húzott magassága fele a harmadik csúcsból húzott szögfelező három-szögbe eső szakaszának!

Megoldás:

Legyen $CAB\angle = \alpha$!

A feltétel szerint $ABC\angle = \alpha + 120^\circ$.

Így



$$BCA\angle = 180^\circ - \alpha - (\alpha + 120^\circ) = 60^\circ - 2\alpha.$$

Mivel CD felezi a szöget, ezért

$$DCA\angle = (60^\circ - 2\alpha) : 2 = 30^\circ - \alpha.$$

A $CDB\angle$ külső szöge az ADC háromszögnek, ezért

$$CDB\angle = \alpha + (30^\circ - \alpha) = 30^\circ.$$

Mivel a CT magasság merőleges az AB egyenesére, ezért DTC derékszögű háromszög, amelynek egyik szöge 30° -os. Így ez egy szabályos háromszög „fele”, amiből következik, hogy DC kétszer olyan hosszú, mint CT .

Tehát a háromszög harmadik csúcsából húzott magassága fele a harmadik csúcsból húzott szögfelező háromszögbe eső szakaszának.

11. feladat

Az ABC háromszögben $AB = AC$ és a $BAC\angle = 40^\circ$. A háromszög AB illetve BC oldalán felvesszük az S illetve T pontokat úgy, hogy $BAT\angle = BCS\angle = 10^\circ$. Az AT és az SC egyenesek metszéspontja P . Bizonyítsuk be, hogy $BT = 2 \cdot PT$!

Megoldás:

ABC háromszög egyenlő szárú és $BAC\angle = 40^\circ$, ezért

$$ABC\angle = BCA\angle = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ.$$

Mivel $BCS\angle = BAT\angle = 10^\circ$,

ezért $PCA\angle = BCA\angle - BCS\angle = 60^\circ$

és

$$CAP\angle = BAC\angle - BAT\angle = 30^\circ .$$

Így

$$APC\angle = 180^\circ - PCA\angle - CAP\angle = 90^\circ ,$$

azaz APC háromszög és ezzel együtt TPS háromszög is derékszögű.

$ABT\Delta \sim BCS\Delta$, mert $ABC\angle$ közös

és $BAT\angle = BCS\angle$.

Ebből következik, hogy $\frac{BT}{BS} = \frac{AB}{BC}$. Innen és abból,

hogy B -nél lévő szögük közös az következik, hogy $TSB\Delta \sim ABC\Delta$. Így TSB háromszög is egyenlő szárú, azaz $TS = TB$, illetve

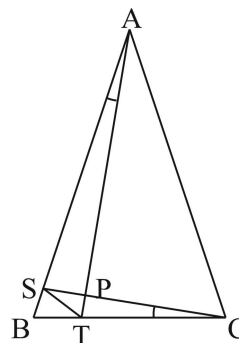
$$TSB\angle = SBT\angle = 70^\circ .$$

$$CSB\angle = 180^\circ - SBC\angle - BCS\angle = 100^\circ ,$$

ebből

$$PST\angle = CSB\angle - TSB\angle = 100^\circ - 70^\circ = 30^\circ .$$

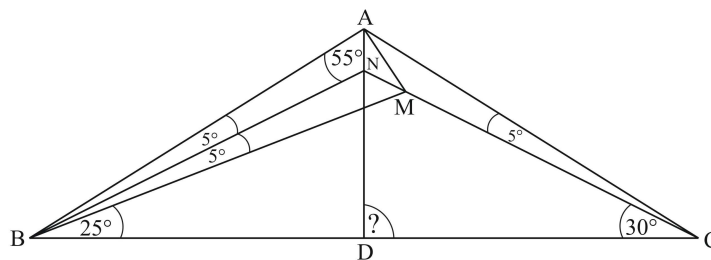
Tehát TPS derékszögű háromszög egyik szöge 30° , azaz ez egy „fél” szabályos háromszög, amelynek TS átfogója a PT befogó kétszerese, így $BT = TS = 2 \cdot PT$.



12. feladat

Adott az ABC háromszög, amelyben $AB = AC$ és $CAB\angle = 110^\circ$. A háromszög belsejében levő M pontra fennáll, hogy $MCB\angle = 30^\circ$ és $MBC\angle = 25^\circ$. Határozd meg az $AMB\angle$ -et!

Megoldás:



Megrajzoljuk a háromszög AD szimmetriatengelyét. Ez felezi a szárszöget, ezért

$$DAB\angle = DAC\angle = 55^\circ \quad ABC\angle = ACB\angle = (180^\circ - 110^\circ) : 2 = 35^\circ .$$

CM egyenes N pontban metszi AD -t. N rajta van a BC felezőmerőlegesén, ezért $NB = NC$.

Így

$$NBC\angle = NCB\angle = MCB\angle = 30^\circ .$$

Innen

$$ABN\angle = ABC\angle - NBC\angle = 35^\circ - 30^\circ = 5^\circ .$$

Az

$$NBM\angle = NBC\angle - MBC\angle = 30^\circ - 25^\circ = 5^\circ ,$$

így

$$ABN\angle = NBM\angle .$$

Mivel $BMN\angle$ külső szöge az MBC háromszögnek, ezért

$$BMN\angle = MBC\angle + MCB\angle = 55^\circ .$$

$$ABN\Delta \cong NBM\Delta ,$$

mert

$$ABN\angle = NBM\angle = 5^\circ , \quad NAB\angle = BMN\angle = 55^\circ$$

és BN oldaluk közös. Ebből következik, hogy $AB = MB$, azaz ABM háromszög egyenlő szárú.

Tehát

$$AMB\angle = (180^\circ - ABM\angle) : 2 = (180^\circ - 10^\circ) : 2 = 85^\circ .$$

13. feladat

Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogóján úgy helyezkednek el az M és N pontok, hogy $MCN\angle = 45^\circ$ (M az A -hoz, N a B -hez van közelebb).

Igazoljuk, hogy $MN^2 = AM^2 + NB^2$!

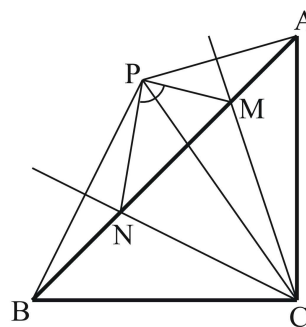
Megoldás:

Tükrözzük az A csúcsot az MC egyenesre! Az A képét Q -val jelölve

$$QC = AC \text{ és } QCM\angle = ACM\angle .$$

Tükrözzük a B csúcsot az NC egyenesre! A B képét R -rel jelölve $RC = BC$ és

$$RCN\angle = BCN\angle .$$



Ha $\angle ACM = \delta$, akkor $\angle QCM = \delta$, és ha $\angle BCN = \varepsilon$, akkor $\angle RCN = \varepsilon$ is fennáll.

Ha Q és R nem esik egybe, akkor $\angle MCN = \delta + \varepsilon + \angle QCR$ (Q az A -hoz, R a B -hez van közelebb) vagy $\angle MCN = \delta + \varepsilon - \angle QCR$ (Q a B -hez, R az A -hoz van közelebb).

A feltétel szerint $\angle MCN = 45^\circ$, így $\angle ACB = 90^\circ - \angle QCR$ vagy $\angle ACB = 90^\circ + \angle QCR$.

Tehát mivel $\angle ACB = 90^\circ$, ezért Q és R ugyanaz a pont. Jelöljük ezt a pontot P -vel! A tükrözés miatt

$$\angle MPC = \angle MAC = 45^\circ \text{ és } \angle NPC = \angle NBC = 45^\circ .$$

Így

$$\angle MPN = \angle MPC + \angle NPC = \angle MAC + \angle NBC = 90^\circ ,$$

azaz NMP háromszög derékszögű. Pitagorasz tétele szerint $MN^2 = PM^2 + PN^2$.

A tükrözés miatt $PM = AM$ és $PN = NB$, tehát $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

14. feladat

Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóján felvettük azt a K pontot, amelyre $KC = BC$. Az A csúcsból induló belső szögfelező a BC oldalt L pontban metszi. Tudjuk, hogy KC szakasz felezi az AL szakaszt. Határozd meg az ABC háromszög hegyesszögeit!

Megoldás:

Jelöljük a KC és az AL szakaszok metszéspontját O -val és az A -nál levő szöget 2α -val! O rajta van a szögfelezőn, ezért $\angle OAC = \alpha$.

Mivel O felezőpont és LCA háromszög derékszögű, ezért $CO = AO = LO$ (Thalész tételének megfordítása miatt).

Így CAO háromszög egyenlő szárú,

azaz $\angle OCA = \angle OAC = \alpha$.

A $\angle CKB$ külső szöge CAK háromszögnek, ezért

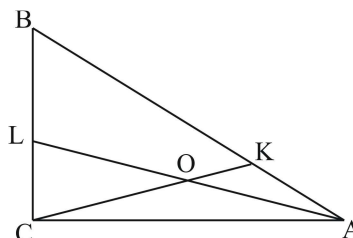
$$\angle CKB = \angle KCA + \angle CAK = \alpha + 2\alpha = 3\alpha .$$

Mivel $KC = BC$, azaz KBC háromszög egyenlő szárú, ezért $\angle KBC = \angle CKB = 3\alpha$.

A derékszögű háromszög hegyesszögeinek összege

$$\angle CAB + \angle ABC = 2\alpha + 3\alpha = 5\alpha = 90^\circ ,$$

amiből $\alpha = 18^\circ$. Tehát a két hegyesszög nagysága 36° és 54° .



15. feladat

A húrtrapéz átlója felezi a trapéz tompaszögét. A trapéz kisebbik alapja 3 cm, a kerülete 42 cm. Határozd meg a trapéz területét!

Megoldás:

AC felezi a $BCD\angle$ -et, ezért $BCA\angle = ACD\angle$.

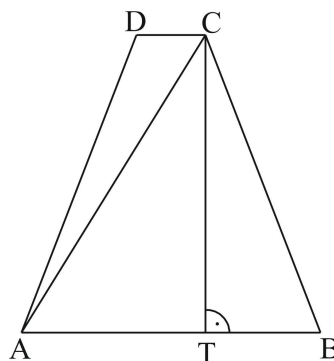
A $CAB\angle = ACD\angle$, mert váltószögek.

Így $BCA\angle = CAB\angle$, azaz az ABC háromszög egyenlő szárú. A húrtrapéz szimmetriáját is figyelembe véve $BC = AD = AB$.

Így a kerület

$$K_{ABCD} = 3 \cdot AB + DC = 3 \cdot AB + 3 \text{ cm} = 42 \text{ cm}.$$

Ebből $AB = (42 \text{ cm} - 3 \text{ cm}) : 3 = 13 \text{ cm}$.



Az egyenlő szárú trapéz CT magasságát behúzva

$$BT = (AB - DC) : 2 = (13 \text{ cm} - 3 \text{ cm}) : 2 = 5 \text{ cm}.$$

BCT derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét:

$$CT = \sqrt{BC^2 - TB^2} = \sqrt{(13 \text{ cm})^2 - (5 \text{ cm})^2} = 12 \text{ cm}.$$

Tehát a trapéz területe

$$T_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot CT = \frac{13 \text{ cm} + 3 \text{ cm}}{2} \cdot 12 \text{ cm} = 96 \text{ cm}^2.$$

16. feladat

Az $ABCD$ trapéz szárjai $AD = 8$ egység, $BC = 10$ egység, a DC rövidebb alap 2 egység hosszúságú. Az $ABC\angle$ szögfelezője felezi az AD oldalt. Határozd meg a trapéz területét!

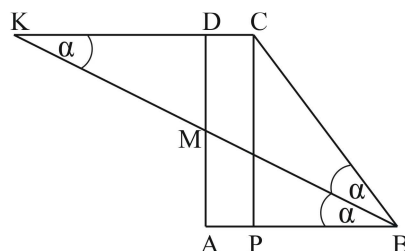
Megoldás:

Jelölje M az AD felezőpontját, az MB és CD egyenesek közös pontját K !

$CKB\angle = ABK\angle$, mert váltószögek és

$KBC\angle = ABK\angle$, mert KB szögfelező.

Ezekből $CKB\angle = KBC\angle$, azaz KBC



háromszög egyenlő szárú, így $KC = BC = 10$.

Mivel $DC = 2$, ezért $KD = KC - DC = 10 - 2 = 8$.

Az M felezi AD oldalt, így

$$DM = MA. DKM \angle = ABM \angle \text{ és } KMD \angle = BMA \angle,$$

mert csúcsszőgek. Ezek miatt $DKM \Delta \cong ABM \Delta$. Így $KD = AB = 8$.

Húzzunk párhuzamost a DA oldallal a C ponton keresztül! Ez az AB alapot a P pontban metszi. A keletkező PBC háromszög oldalai:

$$PB = AB - AP = AB - DC = 8 - 2 = 6, BC = 10, PC = AD = 8.$$

Az oldalakra teljesül, hogy $6^2 + 8^2 = 10^2$, azaz $PB^2 + PC^2 = BC^2$. Így Pitagorasz tételének megfordítása miatt a PBC háromszög derékszögű. Ebből következik, hogy a CP szakasz a trapéz magassága.

Tehát a trapéz területe:

$$T_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot CP = \frac{8 + 2}{2} \cdot 8 = 40.$$

17. feladat

Rajzolj egy derékszögű háromszög átfogójára kifelé, az átfogóval megegyező oldalú négyzetet! Kösd össze a derékszögű háromszög derékszögű csúcsát a négyzet középpontjával! Bizonyítsd be, hogy ez az összekötő szakasz felezi a derékszöveget!

Megoldás:

A négyzet középpontját O -val, az AB átfogó felezőpontját F -fel, a háromszög A -nál lévő szögét α -val jelöljük és C -t összekötjük F -fel.

ABC háromszög derékszögű, ezért Thalész tételének megfordítása miatt F az ABC háromszög köré írt körének középpontja. Így $AF = CF$, azaz AFC háromszög egyenlő szárú, amiből következik, hogy FCA szög is α . Ebből $AFC \angle = 180^\circ - 2\alpha$.

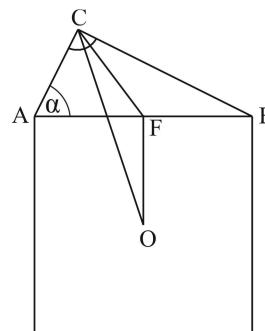
Így

$$OFC \angle = OFA \angle + AFC \angle = 90^\circ + 180^\circ - 2\alpha = 270^\circ - 2\alpha$$

Mivel

$$FO = \frac{AB}{2} = AF \text{ és } AF = CF,$$

ezért $FO = CF$, azaz OFC háromszög egyenlő szárú,



így

$$FCO\angle = COF\angle = \frac{180^\circ - OFC\angle}{2} = \frac{180^\circ - (270^\circ - 2\alpha)}{2} = \alpha - 45^\circ.$$

Tehát

$$OCA\angle = FCA\angle - FCO\angle = \alpha - (\alpha - 45^\circ) = 45^\circ,$$

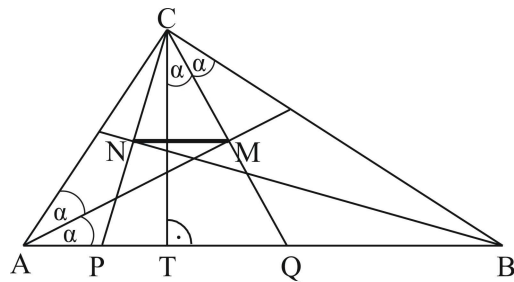
azaz CO szakasz valóban felezi a BCA derékszöget.

18. feladat

Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasság talppontja T . A CAB szög és a BCT szög szögfelezői az M pontban, a CBA szög és az ACT szög szögfelezői az N pontban metszik egymást. Igazoljuk, hogy NM párhuzamos AB -vel!

Megoldás:

Az $ACT\angle$ szögfelezője P pontban, a $BCT\angle$ szög-felezője Q pontban metszi az AB átfogót. $CAB\angle = BCT\angle$, mert merőleges szárú hegyesszögek.



Így

$$CAM\angle = MAQ\angle = BCQ\angle = QCT\angle = \alpha.$$

$$TCA\angle = 90^\circ - 2\alpha,$$

ezért

$$MCA\angle = \alpha + 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - \alpha.$$

Így

$$AMC\angle = 180^\circ - CAM\angle - MCA\angle = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

azaz az AQC háromszög AM szögfelezője egyben magassága is, ami azt jelenti, hogy M a CQ oldal felezőpontja.

Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy N a CP oldal felezőpontja. Így NM szakasz a PQC háromszög középvonala, tehát NM párhuzamos PQ -val, azaz AB -vel is.

19. feladat

Az $ABCD$ téglalap középpontja O és a $\angle DAC = 60^\circ$. A $\angle DAC$ szög szögfelezője a DC egyenest az S pontban metszi. Az OS és AD egyenesek metszéspontja L , a BL és AC egyenesek metszéspontja pedig M . Igazoljuk, hogy SM és CL egyenesek párhuzamosak egymással!

Megoldás:

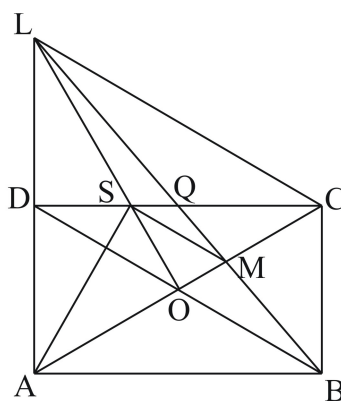
Az ACD derékszögű háromszögben $\angle DAC = 60^\circ$ és AS szögfelező, ezért $\angle SAC = \angle ACS = 30^\circ$. Így ACS háromszög egyenlő szárú. Mivel O az AC oldal felezőpontja, ezért OS egyenes az ACS háromszög magasságvonala, ami egyben az AC szakasz szakaszfelező merőlegese. Ennek egyik pontja L , amely így A -tól és C -től egyenlő távolságra van. Ebből következik, hogy az ACL háromszög egyenlő szárú, és mivel $\angle LAC = 60^\circ$, ezért az ACL háromszög szabályos.

Mivel $CD \perp LA$, ezért CD az ACL háromszög egy másik magassága. A szabályos háromszögek magasságai egyben súlyvonalai is, ezért OL és CD szakaszok S metszéspontja a háromszög súlypontja. A súlypont a súlyvonalakat $2 : 1$ arányban osztja, ezért az S pont az OL szakasz O -hoz közelebbi harmadolópontja.

Mivel ACL háromszög szabályos és $ABCD$ téglalap, ezért $LD = DA = CB$, valamint LD és CB párhuzamosak. Így $BCLD$ négyszög paralelogramma. A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért Q a DC oldal felezőpontja. Ebből következik, hogy BQ a BCD háromszög egyik súlyvonala. Mivel O felezi AC -t, ezért CO a BCD háromszög egy másik súlyvonala. Ezekből következik, hogy M a BCD háromszög súlypontja. Így az M a CO szakasz O -hoz közelebbi harmadolópontja.

Mivel $\frac{OS}{OL} = \frac{OM}{OC} = \frac{1}{3}$ és $\angle SOM = \angle LOC$, ezért $SOM \Delta \sim LOC \Delta$, amiből

következik, hogy $\angle OMS = \angle OCL$. Mivel a szögek nagysága egyenlő és egyik száruk egy egyenesbe esik, ezért a másik száruk párhuzamos. Tehát SM és CL egyenesek párhuzamosak egymással.

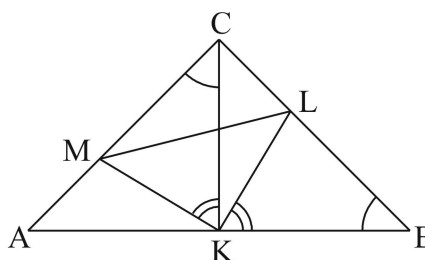


20. feladat

Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja K . A BC illetve AC befogókon a megfelelő L illetve M pontokra igaz, hogy $BL = CM$. Igazoljuk, hogy az LMK háromszög szintén egyenlő szárú derékszögű!

Megoldás:

ABC egyenlő szárú háromszög, ezért $ABC\angle = CAB\angle = 45^\circ$, valamint a CK az átfogóhoz tartozó magassága és a derékszögű csúcs szögét is felezi. Ebből következik, hogy $CKB\angle = AKC\angle = 90^\circ$ és $KCB\angle = KCA\angle = 45^\circ$.



Mivel $KCB\angle = KBC\angle = 45^\circ$, ezért KBC háromszög is egyenlő szárú, így $KB = KC$.

Mivel $KBL\angle = KCM\angle = 45^\circ$, $KB = KC$ és a feltétel szerint $BL = CM$, ezért $KBL\Delta \cong KCM\Delta$.

Ebből következik, hogy $KL = KM$. Tehát KLM háromszög egyenlő szárú.

Mivel

$$KBL\Delta \cong KCM\Delta, \text{ ezért } LKB\angle = MKC\angle.$$

Emiatt

$$MKL\angle = MKC\angle + CKL\angle = LKB\angle + CKL\angle = KCB\angle = 90^\circ,$$

azaz LMK háromszög derékszögű.

Tehát az LMK háromszög szintén egyenlő szárú derékszögű.

21. feladat

Az ABC egyenlő oldalú háromszög AC oldalának felezőpontja K , a BC oldal M pontjára pedig igaz, hogy $CM : MB = 1 : 3$. Az AB oldalon vegyük fel a P pontot úgy, hogy a PKM háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen. Milyen arányban osztja a P pont az AB oldalt?

Megoldás:

A KM rögzített szakasz, ezért a háromszög kerülete akkor lesz a legkisebb, ha a KPM törött vonal a legrövidebb.

Az M pontot az AB egyenesre tükrözve a kapott M' pontot összekötjük K -val. Az AB -vel való metszéspont lesz a P pont.

Ekkor

$$KP + PM = KP + PM' = KM'.$$

Ha Q egy P -vel nem egyenlő másik pontja az AB szakasznak, akkor

$$KQ + QM = KQ + QM' > KM',$$

mert QKM' háromszög két oldalának összege a háromszög-egyenlőtlenség szerint nagyobb a harmadik oldalnál. Tehát KPM háromszög kerülete a legkisebb.

A tükrözés miatt $MPB\angle = M'PB\angle$,

másrészt $APK\angle = M'PB\angle$,

mert csúcsszögek, így $APK\angle = MPB\angle$.

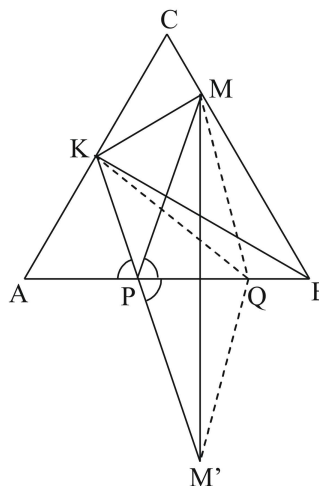
Mivel

$$APK\angle = MPB\angle \text{ és } KAP\angle = PBM\angle = 60^\circ, \text{ ezért } APK\Delta \sim BPM\Delta.$$

Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya megegyezik, így

$$AP : PB = AK : BM = \frac{1}{2}a : \frac{3}{4}a = 2 : 3.$$

Tehát a P pont $2 : 3$ arányban osztja az AB oldalt.



22. feladat

Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, a körülírt kör középpontja O . Igazoljuk, hogy az AOC törött vonal két egyenlő részre osztja a négyszög területét!

Megoldás:

Ha AOC egy egyenesre illeszkedik, akkor AOC olyan egyenes szakasz, amely a húrnégyszöget két egybevágó derékszögű háromszögre bontja, így a területét nyilván felezi.

Ha O és B az AC egyenes által meghatározott két különböző félsíkba esik, akkor AC és BD szakaszok metszéspontját K -val, az O -ból az AC -re, illetve a BD -re bocsátott merőlegesek talppontjait M -mel és N -nel jelöljük. Mivel $OA = OC = r$, ezért AOC háromszög egyenlő szárú, így OM felezi a húrnégyszög AC átlóját. Hasonlóan N felezi a BD átlót.

Mivel a húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, ezért $NOMK$ négyszög téglalap, így $MO = KN$.

$$\begin{aligned} T_{ABCO} &= T_{ABC} + T_{ACO} = \\ &= \frac{AC \cdot BK}{2} + \frac{AC \cdot MO}{2} = \frac{AC \cdot (BK + MO)}{2} = \frac{AC \cdot (BK + KN)}{2} = \\ &= \frac{AC \cdot BN}{2} = \frac{AC \cdot \frac{1}{2} \cdot BD}{2} = \frac{T_{ABCD}}{2} \end{aligned}$$

Ha O és B az AC egyenes azonos félsíkjába esik, akkor ugyanígy kell eljárni. Tehát az AOC törött vonal két egyenlő részre osztja a négyszög területét.

23. feladat

Az $ABCD$ négyszögben

$$DAB\angle = 130^\circ, \quad CDA\angle = 70^\circ, \quad BCD\angle = 80^\circ \text{ és } AB = BC.$$

Számítsuk ki a BDA szög nagyságát!

Megoldás:

Legyen E a CD oldal azon pontja, amelyre $EBC\angle = 20^\circ$!
Ekkor

$$CEB\angle = 180^\circ - EBC\angle - BCE\angle = 80^\circ,$$

így a BCE háromszög egyenlő szárú, ezért $BE = BC$.

Az

$$ABC\angle = 360^\circ - BCD\angle - CDA\angle - DAB\angle = 80^\circ.$$

Ebből

$$ABE\angle = ABC\angle - EBC\angle = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$

Mivel $BE = BC$ és $AB = BC$, ezért $AB = BE$, valamint $ABE\angle = 60^\circ$, így ABE háromszög szabályos. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} EAB\angle &= 60^\circ \text{ és } EA = AB. \\ DAE\angle &= DAB\angle - EAB\angle = 130^\circ - 60^\circ = 70^\circ \end{aligned}$$

és a feltétel szerint $\angle EDA = 70^\circ$, így EDA háromszög egyenlő szárú, azaz $ED = EA = AB = BE$. Ebből következik, hogy BED háromszög egyenlő szárú, azaz $\angle EDB = \angle DBE$.

Mivel

$$\angle BED = 180^\circ - \angle CEB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ,$$

ezért

$$\angle EDB = \angle DBE = (180^\circ - 100^\circ) : 2 = 40^\circ.$$

Tehát

$$\angle BDA = \angle EDA - \angle EDB = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

24. feladat

Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja M , a BC oldalának egyik pontja P . Az AP és CM szakaszok az O pontban metszik egymást úgy, hogy $CO = CP$. Határozzuk meg az $OM : PB$ arányt!

Megoldás:

A B ponton át párhuzamost húzunk CM -mel. Ez az AP egyenest K pontban metszi.

A feltétel szerint a COP háromszög egyenlő szárú,

ezért $\angle COP = \angle OPC$.

Mivel $CO \parallel KB$,

ezért $\angle COP = \angle BKP$ (váltószögek).

Az $\angle OPC = \angle KPB$, mert csúcshögek.

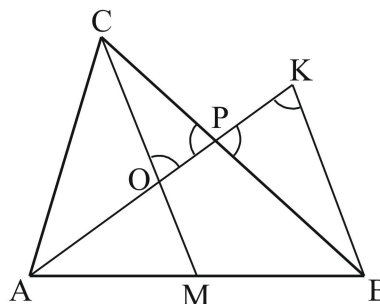
Ezekből következik, hogy

$$\angle KPB = \angle OPC = \angle COP = \angle BKP,$$

azaz PBK háromszög egyenlő szárú, amiből $PB = KB$.

Mivel M az AB oldal felezőpontja és $MO \parallel BK$, ezért MO az ABK háromszög középvonala. Így $KB = 2 \cdot OM$.

Tehát $PB = KB$ és $KB = 2 \cdot OM$, amiből $PB = 2 \cdot OM$, azaz $OM : PB = 1 : 2$.

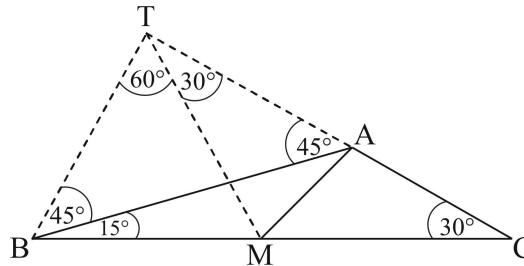


25. feladat

Az ABC háromszög szögei: $\beta = 15^\circ$, $\gamma = 30^\circ$. Legyen M a BC oldal felezőpontja! Igazoljuk, hogy az ABC és MAB háromszögek hasonlóak!

Megoldás:

Állítsunk merőlegest B -ből az AC egyenesére, metszéspontjuk legyen T ! Mivel $\gamma = 30^\circ$, ezért BCT derékszögű három-szög egy „fél” szabályos háromszög.



Ebből következik, hogy

$$BC = 2 \cdot TB \text{ és } TBC\angle = 60^\circ .$$

Az M felezi BC -t, ezért $BC = 2 \cdot BM$, így $TB = BM$.

Ebből és a $TBC\angle = 60^\circ$ -ből következik, hogy TBM háromszög egyenlő oldalú.

Így $TM = TB$ és $MTB\angle = 60^\circ$.

A $BAT\angle$ külső szöge az ABC háromszögnek, ezért

$$BAT\angle = \beta + \gamma = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ ,$$

valamint $ATB\angle = 90^\circ$, ezért ATB egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $TA = TB$.

Mivel $TM = TB$ és $TA = TB$, ezért $TM = TA$, azaz TMA egyenlő szárú háromszög, amiből következik, hogy $TMA\angle = MAT\angle$.

Másrészt

$$ATM\angle = ATB\angle - MTB\angle = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ .$$

Ezekből következik, hogy

$$MAT\angle = (180^\circ - ATM\angle) : 2 = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ .$$

Így

$$MAB\angle = MAT\angle - BAT\angle = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ .$$

Tehát MAB háromszög két szögének nagysága 15° és 30° , azaz megegyeznek az ABC háromszög szögeinek nagyságával, így a két háromszög hasonló.

26. feladat

Az ABC derékszögű háromszög átfogója AB . A C pontból az α szög szögfelezőjére húzott merőleges a β szög szögfelezőjét E pontban, a C pontból a β szög szögfelezőjére húzott merőleges az α szög szögfelezőjét F pontban metszi. D a C pontból húzott magasság talppontja. Bizonyítsuk be, hogy $FD \perp DE$!

Megoldás:

$BCD\angle = CAB\angle = \alpha$,
mert merőleges szárú hegyes-szögek.

$$ECD\angle = FAD\angle = \frac{\alpha}{2},$$

mert szintén merőleges szárú hegyesszögek. Ezekből következik, hogy

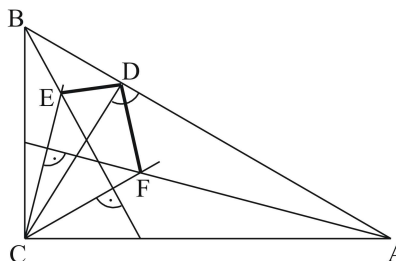
$$BCE\angle = BCD\angle - ECD\angle = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

azaz $BCD\angle$ szögfelezője a CE egyenes. Mivel E a $BCD\angle$ és a $DBC\angle$ szögfelezőjének metszéspontja, így DE egyenes a BCD háromszög harmadik szögének szögfelezője.

Tehát $CDE\angle = CDB\angle : 2 = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Teljesen hasonlóan DF egyenes az $ADC\angle$ szögfelezője, így $FDC\angle = 45^\circ$.

Tehát $FDE\angle = FDC\angle + CDE\angle = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, azaz $FD \perp DE$.



27. feladat

Egy egységnyi oldalú négyzet középpontján áthalad egy e egyenes. Számítsuk ki a négyzet csúcsainak e -től mért távolságai négyzetének összegét!

Megoldás:

Legyen $AQ = x$ és $BR = y$! Mivel az ábra O -ra középpontosan szimmetrikus, ezért $CS = x$ és $DP = y$.

A négyzet átlói egyenlő hosszúak, felezik egymást és egy-másra merőlegesek, ezért $AO = BO$ és $AOQ\angle = OBR\angle$ (merőleges szárú hegyesszögek).

Mivel

$$AO = BO, AOQ\angle = OBR\angle \text{ és } OQA\angle = BRO\angle = 90^\circ,$$

ezért $AOQ\Delta \cong OBR\Delta$. Ebből $QO = RB = y$.

A négyzet oldalának hossza 1, így $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Felírva az AOQ derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét azt kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}. \text{ Tehát a kérdéses összeg } 2x^2 + 2y^2 = 1.$$

