

Észforgató középiskolásoknak

1. Egy tábla egymás után felütünk tíz darab tojást. A tojások közül kettő romlott, de ez csak a feltöréskor derül ki. A záptojások az összes előtűk feltört tojást használhatatlanná teszik. A tálat ilyenkor kimossuk és a megmaradt tojásokkal folytatjuk az eljárást. A jó tojásoknak átlagosan hányadrésze megy ilyen módon veszendőbe?
2. Egy szabályos háromszöget a középpontja körül pozitív irányba elforgatunk először 30° -kal, azután tovább forgatjuk 90° -kal, majd 270° -kal, a k -adik lépésben $3k$ fokkal. Hányféle helyzetet vehet fel a háromszög az elforgatások eredményeképpen?
3. Az $y=x^2$ parabolához az $y=x$ egyenletű egyenes mely pontjából húzható két, egymásra merőleges érintő?
4. Egy 9-szer 9-es táblázat mezőibe 460-tól 540-ig beírtuk egymás után az egész számokat a bal felső sarokból indulva, soronként balról jobbra haladva. Elhelyezhető-e ezen a táblán egy négy négyzetből álló, L betűt formázó kartonlap úgy, hogy 4 olyan számot fedjen le, amelyek összege 2005?
5. Adjuk meg az összes olyan 7-tel osztható pozitív egész számot, amelynek tízes számrendszerbeli alakja 5-re végződik és a többi jegye pedig 1.
6. Melyek azok a 45-tel osztható háromjegyű számok, amelyeknek a számjegyei a felírás sorrendjében számtani sorozatot alkotnak?
7. Egy téglalap egyik oldala 10 cm hosszú. Mekkora a téglalap másik oldala, ha egy $10\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ -es téglalap átlósan is éppen elfér benne?
8. Miután Klári kiszámolta, hogy $62+8=44$, észrevette, hogy $662+88=4444$. Igaz-e minden n -re, hogy $(6\dots6\tilde{n}\text{ jegy})2+8\dots8\tilde{n}\text{ jegy}=4\dots4\overset{\sim}{2n}\text{ jegy}$?
9. Margit néni kedvenc csokoládéjának árát 30%-kal felemelték, ugyanakkor a nyugdíja is emelkedett 15%-kal. Hány százalékkal csökken Margit néni csokoládéfogyasztása, ha csak 15%-kal tud többet költeni csokoládéra?
10. Az ötös lottón 2005. szeptember 10-én a következő számokat húzták ki: 4, 16, 22, 48, 88. Mind az öt szám páros, közülük pontosan négy osztható 4-gyel, három 8-cal, kettő pedig 16-tal. Hányféleképpen lehet az 1-től 90-ig terjedő egész számok közül öt különböző ilyen tulajdonságú számot kiválasztani?
11. Repülőn utazunk. A szemünktől 20 cm-re lévő ablakon kinézve egy-egy hajót pillantunk meg a $25\text{cm} \times 40\text{cm}$ -es ablak alsó sarkainak irányában. Tudjuk, hogy a repülő $10,3\text{ km}$ magasan halad, a mi

szemmagasságunk pedig az ablak vízszintes felezővonalában van. Milyen távol van egymástól a két hajó?

12. Lord Moneybag így szólt az unokájához: „Bill, figyelj jól! Mindjárt itt a karácsony. Magamhoz vettem egy 300 és 500 font közötti összeget, mégpedig 6 font egész számú többszörösét. Kapsz belőle 5 fontot 1 fontosokban. Amikor egy-egy fontot átadok neked, a nálam maradt összeg először osztható lesz 5-tel, majd 4-gyel, azután 3-mal, majd 2-vel, végül csak 1-gyel és önmagával. Ha megmondod, hány font van nálam, még egy tízes üti a markodat.” Mennyi pénzt vett magához a lord?

13. Mennyi azoknak a háromjegyű számoknak az összege, amelyeknek minden számjegye páratlan?

14. Tíznel több egységnyi fakockából egy nagy, tömör kockát építettünk, majd a nagy kocka minden lapját befestettük. Ezután különválasztottuk a többtől azokat a kis kockákat, amelyeknek van befestett lapja. Lehet-e a festett kockák száma többszöröse a festetlen kockák számának?

15. Egy henger tengelymetszetének kerülete 90 cm. Legfeljebb mekkora lehet a henger térfogata?

16. Pali, a postás egy hosszú utcában először a páratlan oldalon oda-, majd a páros oldalon visszafelé kézbesítette a leveleket. Odafelé harmadannyi ideig állt a postaládák előtt, mint amennyit visszafelé haladt. Visszafelé negyedannyi ideig állt, mint amennyi ideig odafelé haladt. Végül kiderült, hogy ugyanannyi ideig tartott mindkét oldalon a kézbesítés. Hogyan aránylik egymáshoz az út (állás nélküli) haladási átlagsebessége oda és a vissza?

17. Mekkora ctgx értéke, ha $\text{ctgx} = \sin x$?

18. Hányféle sorrendben alkothatnak a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek négyvel osztható hétjegyű számot? (A szám nem kezdődhet 0-val.)

19. Egy egység oldalú szabályos hatszöglemez tetszőleges belső pontját tükrözzük a hat oldal felezőpontjára. Számítsuk ki az így kapott hatszög területét.

20. Egy téglalap ugyanakkora kerületű és területű, mint egy olyan rombusz, amelynek egyik szöge 30° . Mekkora a téglalap oldalainak aránya?

21. Egy 500 embert érintő felmérés során kiderült, hogy a megkérdezettek 46%-a szereti az eper, 71%-a a vanília, 85%-a csokoládé fagyaltot. Van-e a megkérdezettek között hat olyan ember, aki mind a háromféle fagyaltot szereti?

22. Egy részleges napfogyatkozásnál, amikor a Hold és a Nap látszólagos átmérője ugyanakkora volt, a maximum pillanatában a holdkorong széle a napkorong középpontjára illeszkedett. Hány százalékos volt a napfogyatkozás?

23. Melyik az a szám, amelynek az n -alapú számrendszerben felírt alakja 503, az $(n+2)$ -alapú számrendszerben pedig 305?

24. Adott a síkban négy különböző pont. A négy pont közötti hat távolság közül négy távolság egységnyi, egy pedig 1,2. Mekkora lehet az ismeretlen hatodik távolság?

25. Egy R sugarú gömbbe írt henger magassága $\frac{4}{3}R$. Hányadrésze a henger térfogata a gömb térfogatának?

26. Az a paraméter mely értékére lesz az $x^2(\text{négyzet})-4ax+5a^2(\text{négyzet})-6a=0$ másodfokú egyenlet két gyöke a legmesszebbre egymástól?

27. Egy autókereskedő átlagosan napi 7 autót adott el egy bizonyos időszakban. A leggyengébb forgalmú napot figyelmen kívül hagyva, a fennmaradó napokon átlagosan értékesített autók száma 8. A legerősebb napot nem számítva ez a szám 5. Végül, ha sem a leggyengébb, sem a legerősebb napot nem vesszük figyelembe, akkor a napi átlag 5,75-nak adódik.

Hány autót adott el a kereskedő ebben az időszakban?

28. Egy 12 cm sugarú negyedkörlepből kivágunk az egyik határoló sugara fölé, mint átmérő fölé rajzolt félkört. Az így kapott síkidomba rajzolt legnagyobb körnek mekkora a sugara?

29. Egy 3m oldalú négyzet alapú újságos pavilon tetőszerkezete két egymást átható szabályos háromoldalú hasáb, amelyek egy-egy oldallapja a mennyezettel esik egybe. (A két hasáb egymáshoz képest 90° -kal el van forgatva.) Mekkora a tetőfelület nagysága?

30. Egy szabályos négyoldalú gúla magassága kétszerese az alapél hosszának. Hányadrésze a gúlába beírt kocka térfogata a gúla térfogatának? (A beírt kocka négy csúcsa a gúla oldalélein, négy csúcsa az alaplapon van.)

31. 5000 forinttal a zsebünkben elindulunk ajándékokat vásárolni. Három üzletbe térünk be. Mindegyik üzletben megtetszik egy ajándéktárgy, amelyet meg is veszünk, ha futja pénzünkből. Az áruk egymástól függetlenül mindhárom üzletben 13 valószínűséggel 1000, 1500 vagy 2000 Ft. Mekkora az esélye annak, hogy három ajándéktárgyat sikerül vásárolnunk és még pénzünk is marad?

32. Egy kockadobást nevezünk sikeresnek, ha a dobott szám legalább három. Mi a valószínűbb: az, hogy két dobásból legalább egy sikeres, vagy az, hogy négy dobásból legalább kettő?

33. Egy hatjegyű számot úgy lehet hárommal szorozni, hogy az első jegyét hárommal csökkentjük és a végére írunk egy hármast. Melyik ez a szám?

34. Egy vályú, amelynek keresztmetszete szabályos háromszög, színültig van vízzel. A víz egyötödét ki akarjuk belőle önteni. Hány fokkal kell ehhez a vályút megdőnteni úgy, hogy a végeit határoló háromszögek a saját, függőleges síkjukban mozogjanak?

35. Bankautomatából való pénzfelvétel költsége két részből tevődik össze. Van egy alapidő, amely független a felvett összegtől. Ehhez járul a felvett összeggel egyenesen arányos rész. Mennyi a költség 85 000 Ft felvétele esetén, ha 40 000 Ft esetén 221 Ft, 100 000 Ft esetén pedig 485 Ft?

36. Egy épület külsejének díszítése céljából egy nagyméretű négyzetet festettek a falra. Megrajzolták a négyzet körülírt körét és a négyzet oldalaira kifelé állított félköröket is. A körívek négy Hold alakú mezőt határolnak. Mekkora a négyzet oldala, ha egy-egy ilyen mező területe 1m^2 ?

37. Hány olyan nyolcjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy pontosan annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke? (Példa: 33414434.)

38. Egy félgömb alakú levesestál térfogata 8 liter. Mennyi leves tölti meg a tálal fele magasságáig?

39. Tizenhat húsvéti tojás közül három piros. Tíz tojást egy nagyobb, hatot egy kisebb dobozba helyeztünk véletlenszerűen. Mekkora annak a valószínűsége, hogy mindkét dobozban van piros tojás?
40. Legfeljebb hány oldalú lehet az a konvex sokszög, amelynek belső szögei $d=1^\circ$ differenciájú számtani sorozatot alkotnak?
41. A koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcspontjai: $A(0;4)$, $B(3;0)$, $C(c;6)$. A háromszög területe 7. Mekkora a c , ha tudjuk, hogy $0 < c < 3$?
42. Az ABC szabályos háromszög oldalainak hossza 6 cm. A háromszög C csúcsából kiindulva egy bogár egyenletesen mozog az A csúcs felé 4 mm/s sebességgel. Ugyanakkor a B csúcsból is elindul egy bogár a C csúcs felé 3 mm/s sebességgel. Az indulásuktól számítva mennyi idő múlva lesznek egymáshoz a legközelebb, és mekkora ez a távolság?
43. Egy egységnyi oldalú rombusz hegyesszöge 60° . Hány olyan körvonal van, amelytől a rombusz csúcsai egyenlő távolságra vannak? Mekkora a körök sugara?
44. Egy különböző számjegyekből álló háromjegyű szám 75%-a ugyanazokból a számjegyekből áll, mint az eredeti, de egyik sem marad a helyén. Melyik ez a szám?
45. A K kört belülről érinti a fele akkora sugarú k kör. Szerkesszünk K -ban olyan húrt, amely merőleges a két kör középpontját összekötő egyenesre, és amelyet a k -val alkotott metszéspontjai három egyenlő részre osztanak.
46. Egy tíztagú társaság moziba ment. Két különböző sorba kaptak 5-5 egymás melletti helyre szóló jegyet. A társaságból Ábel és Bendegúz szeretnének egymás mellé ülni, Zsuzsi és Anikó viszont külön akarnak ülni. Hányféleképpen helyezkedhetnek el?
47. Anna felír két tetszés szerinti természetes számot, melyek ugyanazokat a számjegyeket tartalmazzák, csak különböző sorrendben. A nagyobbikból kivonja a kisebbet és a különbséget megszorozza egy tetszőleges természetes számmal. Ezután a szorzatból kitöröl egy nullától különböző számjegyet. A megmaradt számot közli Bélával, aki rövid gondolkodás után kitalálja a kitörölt számjegyet. Hogyan?
48. Egy derékszögű háromszögben az oldalak egy számtani sorozat egymást követő elemei. Határozzuk meg az oldalak arányát. Igazoljuk, hogy a beírt kör sugara a számtani sorozat különbsége.
49. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelyben az oldalak a, b, c hossza egész szám, $(a,b,c)=1$ és az egyik súlyvonalának hossza 7,5?
50. Egy futballcsapat edzője szerint játékosai 95%-os biztonsággal rúgják be a tizenegyest. Mi a valószínűsége annak, hogy öt játékos közül pontosan három hibázik?
51. Egy téglalap oldalainak felezőpontjait kössük össze a szemközti csúcsokkal. Az így kapott nyolc egyenes által meghatározott nyolcszög területe hányadrésze az eredeti téglalap területének?

52. Melyek azok a prímszámok, amelyek felírhatók két pozitív összetett szám összegeként?

53. Felírjuk az egész számokat 1-től egy 50-nel osztható n számig, majd elhagyjuk közülük az 50-nel oszthatókat. Mutassuk meg, hogy a megmaradt számok összege négyzetszám.

54. Egy négyzet alapú csonkagúla alapéle és minden oldaléle 4. Fedőlapjának éle 2. Legfeljebb mekkora távolságra lehet egymástól a csonkagúla két csúcspontja?

55. Egy tanteremben 24 lámpatestet szereltek fel, amelyek mindegyikébe 4-4 izzó fér el. Amikor néhány lámpába becsavarták a négy izzót, akkor már látszott, hogy a rendelkezésre álló készlet kevés lesz. A továbbiakban előbb hármasával, majd csak kettesével, végül egyesével tekerték be az izzókat a lámpatestekbe. Sajnos így is maradtak lámpák, amelyekbe nem jutott izzó. Hány izzó hiányzott, ha kétszer annyi lámpába került egy-egy izzó, mint ahányba négy, és fele annyi lámpába egyáltalán nem jutott, mint ahányba hármat is csavartak?