Szakköri anyag 9.évfolyamnak

Oszthatóság

Számjegyes , helyiértékes feladatok

1. feladat: Határozzuk meg az *a*, *b*, *c* és *d* különböző számjegyeket úgy, hogy $\overline{abcd} : \overline{dcba} = 4$, ahol $\overline{abcd}$ és $\overline{dcba}$ négyjegyű számokat jelöl.

   Megoldás. A $\overline{dcba}$ 4-szerese $\overline{abcd}$, amely szintén négyjegyű, ezért $\overline{dcba} < 3000$, vagyis *d* értéke 1 vagy 2. De 1 nem lehet, mert akkor $\overline{abcd}$ 1-re végződne, holott osztható 4-gyel. Így *d*=2, ekkor *a*=8 vagy 9, de ez utóbbinak a négyszerese nem 2-re végződik, tehát *a*=8. Mivel *d* négyszerese *a*, azért ha *c*-t szorozzuk 4-gyel, akkor nem lehet 10-es átlépés, eszerint csak *c*=1 vagy *c*=0 lehet. De $\overline{abcd}$ osztható 4-gyel és a 02 végű szám nem osztható 4-gyel, ezért csak a *c*=1 lehet jó. Innen már adódik *b*=7 értéke. Vagyis *a*=8, *b*=7, *c*=1, *d*=2. A kapott szám a 8712, és ez valóban jó is. (Kömal K 18)

2. feladat: Hány olyan *ababab* alakú hatjegyű szám van, amely hat különböző prímszám szorzata?
   Megoldás: *ababab*=10101·*ab*=3·7·13·37·*ab*. A feltételeknek megfelelően *ab* tehát olyan kétjegyű szám, mely két prímszám szorzata, melyek között nem szerepel a 3, 7, 13, 37. Tehát *ab* lehetséges szorzatalakja: 2·5, 2·11, 2·17, 2·19, 2·23, 2·29, 2·31, 2·41, 2·43, 2·47, 5·11, 5·17. A továbbiakban már legalább háromjegyű számokat kapunk, tehát 12 megfelelő szám van. (Kömal K.53)

3. feladat: Hány darab olyan *ABAABA* alakú hatjegyű szám van, amely pontosan négy prímszám szorzatára bontható?
   Megoldás: Az *ABAABA* alakú számok *ABA*·1001=*ABA*·7·11·13 alakban írhatók fel. Vagyis az *ABA* alakú prímszámok száma adja a megoldást. A megfelelő prímszámok: 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, azaz 15 darab. (A megfelelő prímszámok a legegyszerűbben a rendelkezésre álló prímtáblázatokból kereshetők ki.)
   (Kömal , K. 81)

4. feladat: Egy csupa különböző számjegyekből álló háromjegyű szám számjegyeiből az összes lehetséges módon kialakítjuk a különböző számjegyeket tartalmazó kétjegyű számokat. Ezeknek a kétjegyű számoknak az összege éppen az eredeti háromjegyű számmal egyenlő. Határozzuk meg az összes ilyen háromjegyű számot.
   Megoldás: Jelöljük az eredeti szám számjegyeit sorban *a*, *b*, *c*-vel. A kialakítható 2-jegyű számok: $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ba}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$. Ezek összege 22(*a*+*b*+*c*), ami egyenlő az eredeti számmal (tehát az eredeti szám osztható 22-vel), így 22(*a*+*b*+*c*)=100*a*+10*b*+*c*. Ez rendezve a 7(*a*+*b*+*c*)=3(11*a*+*b*) alakot ölti. A jobb oldal osztható 3-mal, tehát a bal oldal is, ez viszont azt jelenti, hogy *a*+*b*+*c* osztható 3-mal. Láttuk, hogy az eredeti háromjegyű szám osztható 22-vel, továbbá a számjegyek összege 3-mal, ezért 66 többszörösei jöhetnek szóba. 600-nál nagyobbra nem kell gondolnunk, mert hat kétjegyű szám összege 600-nál nem lehet több. Vagyis csak 132, 198, 264, 330, 396,

462, 528, 594 jöhet szóba. Ellenőrizhetjük, hogy ezek közül a 132, 264, 396 megfelelő, a többi pedig nem. (Kömal K.69)

5. feladat:

A 2163 olyan négyjegyű szám, amelyben az egyesek helyén álló számjegy háromszorosa a százas helyiértéken álló számjegynek, a tízes helyiértéken álló számjegy pedig kétszerese a százas és az ezres helyiértéken álló számjegyek összegének. Igaz-e, hogy az ilyen tulajdonságú négyjegyű számok mindegyike osztható 3-mal?

Megoldás. Igen. A keresett négyjegyű számok számjegyei balról jobbra haladva: a, b, $2a+2b$, $3b$, ezek összege $3a+6b$, ami osztható 3-mal, tehát a megfelelő tulajdonságú négyjegyű számok is oszthatók 3-mal. (Kömal, K.91)

6. feladat: Az ötjegyű $\overline{ABCDE}$ számot 4-gyel szorozva az ötjegyű $\overline{EDCBA}$ számot kapjuk. Határozzuk meg $\overline{ABCDE}$ értékét. (A, B, C, D, E különböző számjegyeket jelölnek.)

Megoldás. Mivel ötjegyű számot 4-gyel szorozva ötjegyű számot kaptunk, ezért A értéke csak 1 vagy 2 lehet. De mivel $\overline{EDCBA}$ osztható 4-gyel, ezért csak az $A=2$ jöhet szóba. Ha 2-vel kezdődik egy ötjegyű szám, akkor a 4-szerese (amely ötjegyű) 8-cal vagy 9-cel kezdődik, de ha az eredeti szám vége 9 lenne, akkor 4-szerese 6-ra végződne. Tehát $E=8$. Mivel $\overline{ABCDE}$ négyszerese 90000-nél kisebb, ezért $\overline{ABCDE} < 2300$, és így a számjegyek különbözősége miatt B értéke csak 1 lehet. Ha a szorzást elkezdjük elvégezni, akkor $4E=32$, leírjuk a 2-t, maradt a 3, ezért $4D$ 8-ra végződik. Csak $D=2$ vagy 7 jöhet szóba, de a 2 már foglalt, tehát $D=7$. A C értékére szóba jöhető 10 értéket végignézve csak egy megoldást kapunk: $21978 \cdot 4=87912$. (Kömal, K.94)

7. feladat: Három egymást követő páratlan természetes szám négyzetének összege olyan négyjegyű szám, melynek minden számjegye azonos. Adjuk meg az összes ilyen számhármast. Találunk-e öt egymást követő páratlan természetes számot, melyek négyzetének összege olyan hatjegyű szám, melynek minden számjegye azonos?

Megoldás. Írjuk fel a három egymást követő páratlan szám négyzetének összegét! $(a-2)^2+a^2+(a+2)^2=3a^2+8$. Mivel a páratlan, ezért a kapott négyzetösszeg is páratlan; másrészt pedig a négyzetösszeg nem osztható 3-mal, így csak 1111, 5555, 7777 lehet az értéke. A lehetőségeket megvizsgálva csak a 41, 43, 45 számhármas megfelelő, melyek négyzetének összege 5555.

Öt egymást követő páratlan szám négyzetének összege $(a-4)^2+(a-2)^2+a^2+(a+2)^2+(a+4)^2=5a^2+40$. Ez 5-tel osztható, így értékére csak az 555 555 jöhetne szóba, de ekkor a nem lenne egész szám. Így nem találhatunk öt megfelelő számot. (Kömal, K.106)

8. feladat:

Ha az 1234 négyjegyű számból minden lehetséges módon törlünk két számjegyet, majd az így megmaradt két számjegyet kétjegyű számként kiolvassuk, akkor a 12, 13, 14, 23, 24, 34 számokat kapjuk. Ezek összege 120. Keressünk olyan négyjegyű számot, amelynél ez az összeg

a) 540;

b) 220.

Megoldás. a) pl. 9876. b) Nincs ilyen. Legyen a keresett négyjegyű szám $\overline{abcd}$ alakú, ekkor a keresett összeg

$\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ad}+\overline{bc}+\overline{bd}+\overline{cd}=10a+b+10a+c+10a+d+10b+c+10b+d+10c+d=30$

. Ez az összeg osztható 3-mal, a 220 pedig nem. Tehát az ilyen módon előállított számok összege nem lehet 220. (Kömal: K.107)

9. feladat: Adjuk meg az összes olyan $\overline{abcde}$ ötjegyű számot, melynek számjegyei között pontosan *a* db 0, *b* db 1, *c* db 2, *d* db 3 és *e* db 4 szerepel. (A különböző betűk nem feltétlenül jelentenek különböző számjegyeket.)

Megoldás. A keresett szám számjegyei közt nem szerepelhet 6 vagy több, hiszen ez azt jelentené, hogy ötnél több számjegye van. 5 sem lehet a számjegyek közt. A keresett szám számjegyeinek összege 5, hiszen összegük éppen azt adja meg, hogy hány számjegye van az eredeti számnak. Mivel a szám ötjegyű, ezért legalább 1-gyel kezdődik, így legalább 1 db 0-t tartalmaz. Ha a szám három 0-t tartalmazna, akkor számjegyei 0, 0, 0, 2, 3 vagy 0, 0, 0, 1, 4 lennének (valamilyen sorrendben), hogy összegük 5 legyen, de így valamelyik számjegyből pontosan két, illetve négy egyformának kéne lennie, ami nem teljesül. A szám nem tartalmazhat négy 0-t, mert akkor a számjegyeinek összege nem lehetne 5. Ha a szám 1 db 0-t tartalmazna, akkor a számjegyei 0, 1, 1, 1, 2 lennének, mert másképp nem jön ki az összegükre 5 úgy, hogy ne szerepeljen egynél több 0 a számban. Ez viszont nem megfelelő, hiszen így három darab 1 van a számban, de nem tartalmaz 3-as számjegyet. Tehát a számunkban csak pontosan két 0 szerepelhet. Ez viszont 0, 0, 1, 2, 2 számjegyeket indukál, hogy az összegük 5 legyen, ezeket pedig 21200 sorrendbe rendezve kapjuk az egyetlen megoldását a feladatnak. (Kömal K.118)

10. feladat: Az ötöslottóban az egyik játékhéten a nyerőszámok emelkedő számsorrendben a következők: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$, $\overline{cd}$. Az öt szám összege $\overline{bcc}$, a harmadik és a második szám szorzata $\overline{bbec}$, a harmadik és az ötödik szorzata pedig $\overline{eccd}$. Határozzuk meg az *a*, *b*, *c*, *d*, *e* számjegyeket. (Kömal (1091)

Megoldás. A növekvő számok miatt $a<b<d$ és $b<c$. A szorzatokat nézve $\overline{bc}\cdot\overline{ca}=\overline{bbec}$ és $\overline{ca}\cdot\overline{cd}=\overline{eccd}$ szerint az utolsó számjegyekből (és hozzátéve, hogy $a\neq d$) $a=1$ lehet csak. Az öt szám összege legfeljebb $5\cdot 99=495$ lehet, ami miatt $b\leq 4$, másrészről az összeg -tízes számrendszer szerint- $11a+12b+31c+d=100b+11c$. Átrendezve $88b-11=d+20c\leq 189$ miatt $b\leq 2$, ezért $b=2$.. Így $d+20c=165$, ahol $d+20c$ utolsó számjegye $d=5$. Innen $c=8$. Tehát $28\cdot 81=2268$, ahonnan $e=6$. A számjegyek tehát **a=1, b=2, c=8, d=5, e=6**. Ellenőrzésképpen a kihúzott számok sorban 12, 28, 81, 82 és 85; a harmadik és ötödik szorzata $81\cdot 85=6885$.

Oszthatóságnál fellépő maradékok vizsgálat

11. feladat: Határozzuk meg a $7^1+7^2+...+7^{2005}$ összeg utolsó két számjegyét.

Megoldás. Vegyük észre, hogy a 7 hatványainak utolsó két számjegye periodikusan ismétlődik: 07, 49, 43, 01, 07, ... A négy, ismétlődő végződés összege 00-ra végződik. Ha

a $7^1+7^2+...+7^{2005}$ összeg tagjait négyesével csoportosítjuk, akkor ennek megfelelően a négyes csoportokban lévő számok összegének utolsó két számjegye 00 lesz, tehát ezek összege is 00-ra végződik. Mivel 2005 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, azért egyedül az utolsó tag nem kerül be ilyen négyes csoportba. Ez a korábban mondottak értelmében 07-re végződik, tehát az eredeti összeg is 07-re végződik. (Kömal K.13.)

12. **feladat:** Egy pozitív egész számot 4-gyel osztva 3, és 9-cel osztva 5 a maradék. Mennyi a maradék, ha a számot 36-al elosztjuk? (Arany Dániel 2006/2007. 1.forduló)
Megoldás: www. szolda. hu

13. feladat: A 9, 8, 8, 7, 7, 7 és még egy tetszés szerint választott számjeggyel írjuk fel a legnagyobb 36-tal osztható, hétjegyű számot.

Megoldás. 36=4·9, ahol 4 és 9 relatív prímek. Tehát egy szám pontosan akkor osztható 36-tal, ha 4-gyel és 9-cel osztható. A megadott számjegyek összege 46, ami 9-cel osztva 1 maradékot ad. Tehát a hiányzó számjegy csak a 8 lehet. 4-gyel akkor lesz osztható a szám, ha az utolsó két számjegyből képezett kétjegyű szám osztható 4-gyel. Az adott számokból képezhető egyetlen 4-gyel osztható kétjegyű szám a 88. Tehát a szám vége 88, a kimaradó számjegyek a 9, 8, 7, 7, 7, melyeket nyilván ilyen sorrendben kell leírni, hogy a lehető legnagyobb számot kapjuk, hiszen a 9-cel való oszthatóság a számjegyek sorrendjétől független.

A legnagyobb 36-tal osztható szám a 9877788. (Kömal K.382)

14. feladat: Adjuk meg a legnagyobb pozitív egész *n* kitevőt, amelyre igaz, hogy $11^n \mid 97! + 98! + 99!$, ahol *k*! jelöli 1-től *k*-ig az egész számok szorzatát.

Megoldás. A háromtagú összegből 97!-t emeljünk ki: 97!+98!+99!=97!·(1+98+98·99)=99^2·97!. Ebben az alakban már össze tudjuk számolni, hogy a 11 mely szorzótényezők prímtényezői között szerepel: 99, 99, 88, 77, 66, 55, 44, 33, 22, 11. Ez összesen 10 szám, mindben első hatványon szerepel a 11. Vagyis *n*=10. (Kömal K 390)

15. feladat: Adjuk össze az összes olyan pozitív egész számot, amelyet ha 2013-mal osztunk, akkor a hányados és a maradék megegyezik.

Megoldás. A 2013-mal való osztásnál 2013-féle maradék lehet. A 0 ezek közül most nem felel meg, mert nem pozitív szám. Vagyis megfelelő szám 2012 darab van: 1·2013+1, 2·2013+2, …, 2012·2013+2012. Ezek összege:

S=(1·2013+1)+(2·2013+2)+…+(2012·2013+2012)=

=2013·(1+2+…+2012)+(1+2+…2012)=2014·(1+2+…+2012)=2014·2013·2012/2=4078507092.

16. feladat: Vegyünk egy olyan szorzatot, amelynek minden tényezője 7. Kaphatunk-e így egy olyan 45 jegyű számot, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből rendre 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 darab van?

Megoldás. Ebben a 45 jegyű számban a számjegyek összege:

$9\cdot1+8\cdot2+7\cdot3+6\cdot4+5\cdot5+4\cdot6+3\cdot7+2\cdot8+1\cdot9=9+16+21+24+25+24+21+16+9=165.$

Mivel a számjegyek összege osztható 3-mal, ezért az eredeti számnak is oszthatónak kellene lenni 3-mal. De ez lehetetlen, mert az eredeti szorzat minden tényezője 7, és a 3 meg a 7 relatív prímek.

Vagyis ilyen 45 jegyű számot nem kaphatunk. (Kömal K.393)

Négyzetszámok

17. feladat: Van-e olyan legalább kétjegyű négyzetszám, amelyik különböző számjegyekből áll, és igaz rá, hogy számjegyeit bármilyen sorrendben írjuk le, a kapott szám is négyzetszám?
Megoldás: A négyzetszámok végződése csak hatféle lehet: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Mivel 0-val nem kezdődhet szám, ezért a 0 kiesik a lehetséges számjegyek közül. 5 sem szerepelhet a számban, hiszen az 5-re végződő négyzetszámok oszthatók 5-tel, tehát 25-tel is, így utolsó előtti számjegyük 2, ez viszont nem szerepel a lehetőségek között. Maradnak tehát azok a számok, melyek az 1, 4, 6, 9 számjegyek közül valahányat tartalmaznak. Négyjegyű számot képezve ezekből nem kapunk megoldást, mert pl. 1946 nem négyzetszám. Háromjegyű számokat képezve sem kapunk megoldást, mert 146, 149, 916, 469 egyike sem négyzetszám. Maradnak tehát az említett számjegyekből összeállítható kétjegyű számok, de ezek sem adnak megoldást, mert 14, 61, 19, 46, 94, 69 egyike sem négyzetszám. Tehát nincs a feltételeknek megfelelő négyzetszám. (Kömal K.27)

18. feladat: **.** Bizonyítsuk be, hogy ha a 121 szám jegyei közé mindkét helyen ugyanannyi nullát írunk (pl. 10 201, 1 002 001 stb.), akkor mindig egy egész szám négyzetét kapjuk.

Megoldás: Ha az 1 és 2, valamint a 2 és 1 közé k db 0-t írunk be, akkor a kapott szám: $10^{2k+2}+2\cdot10^{k+1}+1 = (10^{k+1}+1)^2$, tehát tényleg négyzetszámot kapunk. (Kömal K.29)

19. feladat: Hány olyan osztója van a 857 304 000-nek, amely négyzetszám?

Megoldás: Írjuk fel a 857 304 000 prímtényezős felbontását! $857304000=2^6\cdot3^7\cdot5^3\cdot7^2$. Ha egy szám négyzetszám, akkor minden prímtényezője páros kitevőjű hatványon szerepel a prímtényezős felbontásában. A 857 304 000 négyzetszám osztói tehát azok a számok lesznek, melyek prímtényezős felbontásában a 2-es és a 3-as 0, 2, 4 vagy 6 kitevővel, az 5-ös és a 7-es 0 vagy 2 kitevővel szerepel (más prímtényező pedig nincs a felbontásban). Mivel a különböző prímtényezők kitevői egymástól függetlenül választhatók, ezért a megfelelő lehetőségek száma $4\cdot4\cdot2\cdot2=64$. Tehát 64 olyan osztója van a 857 304 000-nek, amely négyzetszám. (Kömal K.58)

20. feladat :

Lehet-e egy négyzetszám jegyeinek az összege 2006?
Megoldás: Mivel $(3k)^2=9k^2$, $(3k+1)^2=9k^2+6k+1$, $(3k+2)^2=9k^2+12k+3+1$, vagyis a négyzetszámok hármas maradéka vagy 0, vagy 1. Így 2006 nem lehet egy négyzetszám számjegyeinek összege, mert ekkor hárommal osztva 2 lenne a maradék. (Kömal, K.84)

21. feladat: Az unatkozó szultán palotájában ezer szoba van. Mindegyik szobában van egy villanykapcsoló, mellyel az abban a szobában levő összes lámpát egyszerre lehet le- vagy felkapcsolni. Egyik reggel, amikor minden szobában égtek a lámpák, az unatkozó szultán elindult egy kis sétaútra. Az 1000 szobát végigjárta egyesével, majd újra és újra megtette ezt, mindig az első szobától kezdve a sétát. A kirándulás során először minden szobában kapcsolt egyet a villanykapcsolón (tehát ha fel volt kapcsolva, akkor lekapcsolta, ha le volt kapcsolva, akkor felkapcsolta), majd a sétát újrakezdve minden második szobában kapcsolt a kapcsolón, aztán ismét újrakezdve a sétát minden harmadik szobában, és így tovább. Az 500. kör után azonban elunta ezt a játékot, és elment aludni. Olyan szobát akart kiválasztani, melyben nem égnek a lámpák. Mely szobák közül választhatott?
Megoldás: Az 500-as és alatta levő sorszámú szobák közül azokban a szobákban nem égnek a lámpák, amelyek sorszámának páratlan számú osztója van, hiszen minden osztójánál kapcsolt egyet a szultán a kapcsolón, és páratlan számú kapcsolás vezet sötéthez. Páratlan számú osztója a négyzetszámoknak van, ezért az 500 vagy alatta levő sorszámú szobák közül a négyzetszám sorszámúakban van sötét. Az 500 feletti sorszámú szobák esetén azonban az utolsó kapcsolás hiányzik ehhez képest, hiszen minden számnak osztója önmaga, de ezt már az osztók közül a kapcsolgatásnál nem vettük figyelembe. Tehát az 500 feletti sorszámú szobák közül azok lesznek sötétek, melyeknek páros számú osztója van, azaz nem négyzetszámok. Tehát sötét szobák 500 alatt a négyzetszám sorszámúak, 500 felett pedig a nem négyzetszám sorszámúak. (Kömal K.126)

22. feladat: Gyuri 17 évvel idősebb Annánál. Ha Anna életkora mögé írjuk Gyuri életkorát, egy négyjegyű négyzetszámot kapunk. Tizenhárom év múlva ugyanezt mondhatjuk el. Hány évesek most?
Megoldás. 13 év múlva mindketten 13 évvel idősebbek lesznek, mint most, így ha egymás után írjuk az életkorukat, 1313-mal lesz nagyobb a második négyzetszám az elsőnél, tehát: $1313=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$. Az 1313 prímtényezős felbontása: $1313=13\cdot101$, így $y-x=13$ és $x+y=101$ vagy $y-x=1$ és $x+y=1313$. Az elsőből $x=44$, $x^2=1936$, a másodikból $x=656$, $x^2=430336$, de ez nem négyjegyű, így csak az első jó megoldás, amiből Anna 19, Gyuri 36 éves. (Kömal , K. 101.)

23. feladat: Hány olyan háromjegyű szám van – a tízes számrendszerben- amelynek a négyzete 2009-re végződik. (Arany Dániel 2009/2010. 1. forduló /
Megoldás: www.szolda.hu

Prímszámok

24. feladat: Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $2p^2+13$ is prímszám.

Megoldás: A $p = 3$ megoldás. Ha p nem 3, akkor $2p^2+13 = 2(p^2-1)+15 = 2(p-1)(p+1)+15$ osztható 3-mal (és nem 3), ezért nem lehet prím. Tehát p-nek csak egy lehetséges értéke van, a 3. (Kömal K.28)

25. feladat: Hány olyan legfeljebb 5 jegyű, 5-tel nem osztható természetes szám van, amelynek minden jegye prím? (Arany Dániel 2006/2007 . 1.forduló)
    Megoldás: www. szolda.hu

26. feladat: Igaz-e, hogy $2009+ 2^{2010}$ prímszám? (Arany Dániel 2009/2010 , 1. forduló)

    Megoldás: www. szolda.hu

Számelméleti konstrukciók

27. feladat: Vegyünk egy kétjegyű számot, szorozzuk össze a számjegyeit, majd a kapott számmal ezt addig ismételjük, míg egy egyjegyű számot kapunk. Hány olyan kétjegyű szám van, amelynél a végén kapott egyjegyű szám 0?
    Megoldás:

Ha egy lépésben meg akarjuk kapni a 0-t, akkor a kétjegyű számnak tartalmaznia kell a 0 számjegyet, tehát 0-ra kell végződnie. Ha két lépésben akarjuk megkapni a 0-t, akkor az első lépés után olyan számot kell kapnunk, amely 0-ra végződik. Ha három lépésben akarjuk megkapni a 0-t, akkor az első lépésben olyan számot kell kapnunk, amelyből két lépéssel kapjuk meg a 0–t, és így tovább. Ennek alapján az alábbi láncokat lehet felállítani:

1 lépésből:	10		20				30			40		50	60	70	80	90
2 lépésből:	25	52	45		54		56		65	58	85	–	–	–	–	–
3 lépésből:	55	–	95	59	96	69	78	87	–	–	–	–	–	–	–	–

Mivel az alsó sorban szereplő számok egyike sem áll elő két számjegy szorzataként, ezért olyan számot már nem találunk, amelyből négy vagy több lépésben kapjuk meg a 0-t. Ennek megfelelően összesen 24 db, a feltételeknek megfelelő kétjegyű szám létezik.(Kömal K 19)

28. feladat:

a) A 9, 8, 7, 6 számjegyek egyszeri felhasználásával alkossunk két darab kétjegyű számot úgy, hogy szorzatuk a lehető legnagyobb legyen.

b) A 9, 8, 7, 6, 5, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával alkossunk három darab kétjegyű számot úgy, hogy szorzatuk a lehető legnagyobb legyen.

Indokoljuk is mindkét esetben, hogy miért a kapott számok lesznek a megfelelő számok. (Kömal K 16)

Megoldás. *a*) A 9, 8, 7, 6 számokat párokba osztjuk, és az egy párban levő számokból képezzük a kétjegyű számokat. Nyilvánvaló, hogy ha a szorzat maximumát keressük, akkor úgy kell készítenünk a kétjegyű számokat, hogy az elöl álló számjegy nagyobb legyen, mint a hátul álló. Ennek megfelelően csak három lehetőség adódik:

Egyik szám	*Másik szám*	*Szorzat*
98	76	7448
97	86	8342
96	**87**	**8352**

A táblázatból leolvasható, hogy a keresett számpár a 96 és a 87.

b) A 9, 8, 7, 6, 5, 4 számokat párokba osztjuk, és az egy párban levő számokból képezzük a kétjegyű számokat. Nyilvánvaló, hogy ha a szorzat maximumát keressük, akkor úgy kell készítenünk a kétjegyű számokat, hogy az elöl álló számjegy nagyobb legyen, mint a hátul álló. Ennek megfelelően 15 lehetőség adódik:

Első szám	*Második szám*	*Harmadik szám*	*Szorzat*
98	76	54	402 192
98	75	64	470 400
98	74	65	471 380
97	86	54	450 468
97	85	64	527 680
97	84	65	529 620
96	87	54	451 008
96	85	74	603 840
96	84	75	604 800
95	87	64	528 960

95	86	74	604 580
95	84	76	606 480
94	87	65	531 570
94	86	75	606 300
94	**85**	**76**	**607 240**

A táblázatból leolvasható, hogy a 94, 85, 76 számhármas esetén lesz legnagyobb a szorzat.

29. feladat:

A táblázat az ez évi naptár decemberi lapját mutatja.

H	K	Sz	Cs	P	Sz	V
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

A táblázatban valamely 3*x*3-as négyzetcsoportban álló számok összege 160. Mennyi ezen számok közül a legkisebb?

Megoldás. Ha egy olyan 3*x*3-as négyzetcsoportot nézünk, melyek mindegyikében van szám, akkor az alábbi sémát láthatjuk:

a–8	a–7	a–6
a–1	a	a+1
a+6	a+7	a+8

Ezen számok összege 9*a*, vagyis a középső szám 9-szerese. 160 azonban nem osztható 9-cel, tehát csak azok a 3*x*3-as négyzetcsoportok lehetnek megfelelők, melyekben nincs minden négyzetben szám. Azok a csoportok eleve kiesnek, melyek a napok neveinek celláit tartalmazzák, mert a mellettük levő többi szám összege 100 alatt van. A napok celláit nem tartalmazó, de számokkal nem teljesen kitöltött 3*x*3-as négyzetcsoportból 4 van (kettő a felső számsortól indul, kettő pedig az alsó számsorban végződik), és az összeg bennük 64, 72, 184 illetve 160. Ez utóbbi az általunk keresett összeg. Ez az összeg abból a négyzetcsoportból származik, melynek bal felső sarkában 17 áll, tehát a keresett szám a 17.

30. feladat: Egy bűvös négyzetben minden sorban, oszlopban és átlóban a számok összege ugyanannyi. Határozza meg az alábbi bűvös négyzetből hiányzó hat számot!

		51
21	42	

(Arany Dániel 2007/2008. 1.forduló)

Megoldás: szolda.hu

31. feladat:

Készítsünk egy pakli francia kártya lapjaiból 3×3-as bűvös négyzeteket (a bűvös négyzet mezőiben egy-egy kártyalap áll). A számozott lapok annyit érnek, amennyi rájuk van írva; a bubi értéke 11, a dámáé 12, a királyé 13, az ászé 1. A bűvös négyzetben egy-egy oszlopban, sorban, valamint átlóban álló három szám összege mindig ugyanannyi - ezt az összeget nevezzük „bűvös szám"-nak.

a) Mi a lehető legnagyobb bűvös szám, amit el lehet érni, ha csak 9 darab treffet használhatunk fel?

b) Lehet-e 37 a bűvös szám, ha bármelyik 9 lapot felhasználhatjuk?

Megoldás. a) A lehető legnagyobb bűvös szám akkor keletkezhet, ha a treff színűek közül a legnagyobb értékű lapokat használjuk fel. Ha a bűvös négyzetben szereplő számokat összeadjuk, akkor a bűvös szám háromszorosát kapjuk. Jelen esetben ez 13+12+11+10+9+8+7+6+5 = 81, tehát a legnagyobb lehetséges bűvös szám a 27. Meg kell még mutatni, hogy ez a bűvös négyzet tényleg létezik is:

10 *J* 6

5 9 *K*

Q 7 8

b) A lehető legnagyobb bűvös szám akkor keletkezne, ha a 9 legnagyobb értékű lapot használnánk fel, azaz 4 királyt, 4 dámát és egy bubit. Ekkor a lapok pontértékének összege 111, a bűvös szám 37 lenne. Tehát csak a 4 király, 4 dáma, 1 bubi összetételű bűvös négyzet jöhet szóba. Azonban ez a bűvös négyzet nem megvalósítható. A bubi mellé két király kell, hogy a 37 bűvös számként kijöjjön. A bubi nem állhat egyik átlóban sem, mert akkor vele egy oszlopban, sorban és átlóban is két-két király állna (ezek mind különbözők lennének), és ennyi király nincs. Ha viszont a bubi a négyzet egyik oldalának közepén áll, és a sorokban és oszlopokban 37 az összeg (lásd ábra), akkor egyik átlóban sem jön ki a bűvös szám.

K J K

Q K Q

Q K Q (Kömal, K.116)

32. feladat:

Be lehet-e osztani az

a) 1-től 2008-ig,

b) 1-től 2009-ig

terjedő egész számokat két csoportba úgy, hogy a két csoportban a számok összege ugyanannyi legyen? (Arany Dániel 2008/2009. 1. forduló)

Megoldás: szolda.hu

33. feladat:

Egy énekeskönyvben 700 ének van, 1-től 700-ig sorszámozva. Minden vasárnap ebből énekelnek egyet, melynek sorszámát kis fakockákból összerakva jelölik ki. (Az egyjegyű és kétjegyű sorszámokat 0-val kezdve rakják ki, pl. a 3-at 003, a 28-at 028 alakban.) A fakockák oldalain egy-egy számjegy van, és a 6-ost 9-esnek is fel lehet használni.

a) Hány fakockát kell készíteni, hogy minden lehetséges sorszámot ki lehessen rakni? Tervezzünk is meg egy ilyen készletet.

b) Hány éneket vehetnénk még bele az énekeskönyvbe, anélkül, hogy újabb kockát kelljen készítenünk?

Egy énekeskönyvben 700 ének van, 1-től 700-ig sorszámozva. Minden vasárnap ebből énekelnek egyet, melynek sorszámát kis fakockákból összerakva jelölik ki. (Az egyjegyű és kétjegyű sorszámokat 0-val kezdve rakják ki, pl. a 3-at 003, a 28-at 028 alakban.) A fakockák oldalain egy-egy számjegy van, és a 6-ost 9-esnek is fel lehet használni.

a) Hány fakockát kell készíteni, hogy minden lehetséges sorszámot ki lehessen rakni? Tervezzünk is meg egy ilyen készletet.

b) Hány éneket vehetnénk még bele az énekeskönyvbe, anélkül, hogy újabb kockát kelljen készítenünk?

Megoldás. a) Legalább két helyen kell szerepelnie a következő számjegyeknek: 0, 7 és 8 (pl. a 100, 177 és 188 számok miatt). Legalább három helyen pedig a maradék számjegyeknek: 1,

2, 3, 4, 5, 6 (a 111, 222 stb. számok miatt). Ez összesen legalább $3 \cdot 2+6 \cdot 3=24$ hely, és mivel egy kockán 6 hely van, ezért legalább 24/6=4 kocka szükséges.

Ha 4 kockával szeretnénk megoldani, akkor a következőkre kell figyelnünk:

1. Nem kerülhet egy kockára ugyanaz a számjegy többször, mert akkor a három egyforma számjegyből álló megfelelő számot nem tudjuk kirakni. Vagyis minden kockán hat különböző számjegy áll.

2. Két kockán is szerepel a 0 és a 7 együtt, mert ekkor a 007 nem rakható ki.

3. Két kockán is szerepel a 0 és a 8 együtt, mert ekkor a 008 nem rakható ki.

Például a következő négy kocka teljesíti a fenti három feltételt:

1. kocka: 0, 1, 2, 3, 4, 6;

2. kocka: 1, 2, 4, 5, 7, 8;

3. kocka: 1, 2, 3, 5, 6, 8;

4. kocka: 0, 3, 4, 5, 6, 7.

Ezekből valóban kirakható az összes szám 1-700-ig:

Ha csak az 1-6-ig (a 9-et is ideértve) terjedő számjegyekből áll a szám, akkor tetszőleges sorrendben ki tudjuk választani a megfelelő kockákat, hiszen mindegyik számjegy három kockán szerepel.

Ha a számban nem csak 1-6-ig terjedő sszámjegy van, hanem szerepel benne egy vagy két számjegy a 0, 7 és 8 közül, akkor először azokhoz választunk kockát, és utoljára ahhoz a számjegyhez, ami három kockán szerepel.

Ha csak a 0, 7 és 8 számjegyekből áll, akkor a 2. és a 3. feltétel miatt a két egyforma számjegyet tartalmazó számokat elő tudjuk állítani. A maradék két számot: a 078-at és a 087-et szintén.

b) 777 nem rakható ki. A nála kisebb számok - *abc* - mindegyike tartalmaz 7-nél kisebb számjegyet, legyen ez mondjuk *b*. Ekkor a *bac* szám kisebb 700-nál, tehát kirakható, és így az *abc* szám is. (Kömal, K.105)

Diofantoszi egyenlet szorzattá bontás módszerével megoldva

34. feladat:

Sanyi és apja beszélgetnek:

- Fiam, hány oldalas a könyv, amit el kell olvasnod?

- 1000-nél kevesebb.

- Elkezdted már?

- Igen, vasárnap már túl is jutottam a százötvenedik oldalon.

- És ma mennyit haladtál?

- Nagyon sokat! A ma olvasott oldalak sorszámának 2761 az összege.

A beszélgetés napján hányadik oldalon kezdte az olvasást, és hány oldalt olvasott Sanyi?

Megoldás: Legyen $x + 1$ a sorszáma az első ma olvasott oldalnak, és jelölje k az elolvasott oldalak számát. Ekkor a szöveg alapján az alábbi összefüggést írhatjuk fel: $x+1+x+2+...+x+k=2761$. Végezzük el az összegzéseket pl. Gauss módszerével: $kx + \frac{k(k+1)}{2} = 2761$, majd mindkét oldalt szorozzuk meg 2-vel: $k(2x+k+1)=5522$. Mivel 5522 prímtényezős felbontása $2 \cdot 11 \cdot 251$, és a bal oldal két tényezője közül k a kisebbik, ezért az alábbi lehetséges értékek adódnak:

k	1	2	11	22
2x+k+1	5522	2761	502	251
x	2760	1379	245	114

Mivel Sanyi már túl van a 150. oldalon, ezért csak a 246. oldalon kezdhette az olvasást, és így 11 oldalt olvasott el a beszélgetés napján. (Kömal K.26)

35. feladat:

Az eszkimók orrdörgöléssel köszöntik egymást, a sarkkutatókat pacsival. A sarkkutatók az eszkimóknak hellót mondanak, csakúgy, mint egymásnak. Egy összejövetelen 415 helló hangzott el. Hány orrdörgölés és hány pacsi volt? (Mindenki mindenkit üdvözölt a megfelelő módon.)

Megoldás: Minden sarkkutató minden sarkkutatónak és eszkimónak hellót mondott. Ha n db sarkkutató van, és k db eszkimó, akkor az összesen elhangzott hellók száma $n \cdot (n-1+k)$. A 415-öt kell tehát két egész szám szorzatára bontanunk. $415=5 \cdot 83=1 \cdot 415$. Ha a $415=5 \cdot 83$ felbontást tekintjük, akkor a sarkkutatók száma csak 5 lehet (egyébként az eszkimók száma negatív lenne), így az eszkimók száma 79. A pacsik száma $5 \cdot 79=395$, az orrdörgölések száma (mivel ez kölcsönös) $\frac{79 \cdot 78}{2} = 3081$. Ha a $415=1 \cdot 415$ felbontást tekintjük, akkor a sarkkutatók száma csak 1 lehet (egyébként az eszkimók

száma negatív lenne), így az eszkimók száma 415. A pacsik száma 1·415=415, az orrdörgölések száma (mivel ez kölcsönös) $\frac{415 \cdot 414}{2} = 85905$. (Kömal K. 56)

36. feladat: Egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb minden élének hossza egész szám. A hasábnak van 30 és 13 területű lapja. Mekkora a térfogata?(Kömal c. 1088)

Megoldás. A derékszögű háromszög alapú egyenes hasábnak öt lapja van: két darab egybevágó háromszög (az alaplapok), a palástot pedig három téglalap alkotja. A hasáb magasságát jelölje m, a háromszög oldalai pedig legyenek a, b és c, ahol $a<b<c$, tehát c a háromszög átfogója.

Ekkor a hasáb lapjainak területe rendre: $ab/2$, am, bm és cm.

A hasáb térfogata egyenlő az alaplap területének és a hasáb magasságának szorzatával: $V=abm/2$.

Tudjuk, hogy $a, b, c, m \in Z$, illetve a négy különböző terület közül az egyik 13, a másik 30.

Mivel 13 prímszám, ezért két eset lehetséges.

I) $ab/2=13$;

II) a, b, c közül legalább egynek a hossza 1, és $m=13$, vagy fordítva: $m=1$ és a, b vagy c pedig 13.

Vizsgáljuk meg mindkét esetet.

I) $ab/2=13$, ekkor $ab=26$. 26-nak négy pozitív egész osztója van: 1, 2, 13 és 26, vagyis vagy $a=1$ és $b=26$, vagy $a=2$ és $b=13$. Egyik esetben sem lesz $c=\sqrt{a^2+b^2}$ egész szám, tehát $ab\neq 26$.

II) a, b és c pitagoraszi számhármast alkotnak. Az 1 nem tagja egy pitagoraszi számhármasnak sem. Tehát $m=1$. Ebből következik, hogy a háromszög egyik oldalának hossza 13 egység. Függvénytáblázatban láthatjuk, hogy 13 kettő pitagoraszi számhármasnak is tagja. Az egyik számhármas az 5, 12, 13, a másik pedig a 13, 84, 85. Az első számhármas megfelelő: $5\cdot 12=30$. A második számhármas esetén azonban nem keletkezik 30 egységnyi területű lap.

Azt kaptuk, hogy: $a=5$, $b=12$, $c=13$ és $m=1$.

Az élek ismeretében már megadható a hasáb térfogata:

$V=ab/2\cdot m=30$.

37. feladat: Keressük meg az összes olyan (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból álló számötöst, amelyek összege egyenlő a szorzatukkal.(Kömal K 220)

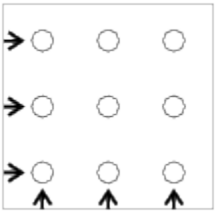
Megoldás. Mivel $a \cdot b = b + b + \ldots b$(a darab), ezért minden szám legfeljebb 5 lehet. Jelöljük a keresett ötösök számait $a \le b \le c \le d \le e$-vel! Mivel $abcde = a+b+c+d+e \le 5e$, ezért $abcd \le 5$, amiből -tekintve, hogy pozitív egészek szorzatáról van szó- az 1,1,1,1, 1,1,1,2, 1,1,1,3, 1,1,2,2 és az 1,1,1,4 számnégyest kell bővíteni.(Az 1,1,1,5 nem jó, mert akkor $e=5$, a szorzat 25, az összeg 13.) Módszeresen keresve -a feltételekbe helyettesítve- rendre az $e=4+e$, $2e=e+5$, $4e=6+e$, $3e=6+e$ és a $4e=7+e$ egyenletek pozitív egész megoldásait keressük. Ha léteznek jó megoldások, akkor azokkal jó számötöst kapunk, melyek adják a feladat összes jó megoldását. Ezek a következők:

(1,1,1,2,5),(1,1,2,2,2),(1,1,1,3,3).

Kombinatorika

Sorbarendezés, táblázatkitöltések

38. feladat: Zsófi logikai játékában 9 db, egy négyzet alakú falapba illesztett, különböző színű farúdra kell kilenc piros, kilenc zöld és kilenc kék, alakra egyforma fakarikát felhelyezni. (A rudak elrendezése felülnézetben látható az *ábrán.*) Helyes elrendezés akkor keletkezik, ha minden rúdon három különböző színű karika van, valamint ha mindhárom szinten az ábrán nyíllal jelölt irányokban három különböző színű karikát találunk. Hányféle helyes elrendezése létezik a karikáknak? (Két elrendezés akkor számít különbözőnek, ha legalább az egyik rúdon a két elrendezésben a karikák más sorrendben követik egymást.)



Megoldás:

A legalsó szinten a karikák elhelyezésére 12 lehetőségünk van.

A középső szinten az alsó szint minden elrendezéséhez 2-féle elrendezést párosíthatunk (pl. az 1. számú elrendezéshez a 7. és 11. számút), a harmadik szintet pedig az első két szinten

elhelyezett karikák színe meghatározza (a harmadik szinten minden oszlopra a rajta még nem szereplő színű karikát kell tenni). Így összesen 24 különböző helyes elrendezés található a karikákhoz. (Kömal K. 62)

P	K	Z
K	Z	P
Z	P	K

1.

P	K	Z
Z	P	K
K	Z	P

2.

P	Z	K
Z	K	P
K	P	Z

3.

P	Z	K
K	P	Z
Z	K	P

4.

K	P	Z
P	Z	K
Z	K	P

5.

K	P	Z
Z	K	P
P	Z	K

6.

K	Z	P
Z	P	K
P	K	Z

7.

K	Z	P
P	K	Z
Z	P	K

8.

Z	K	P
K	P	Z
P	Z	K

9.

Z	K	P
P	Z	K
K	P	Z

10.

Z	P	K
P	K	Z
K	Z	P

11.

Z	P	K
K	Z	P
P	K	Z

12.

39. feladat: Egy 3×3-as táblázatba különböző számjegyeket írtunk úgy, hogy a sorokból balról jobbra és az oszlopokból felülről lefelé (tízes számrendszerben) kiolvasható háromjegyű számok mind oszthatók 6-tal. Hány szám lesz ezek közül osztható 5-tel? (Kömal K 215)

Megoldás: Következő megállapításokat tehetjük:

- Egy szám akkor osztható 5-tel, ha a szám 0-ra vagy 5-re végződik.

- Mivel mindegyik kiolvasott szám 6-tal osztható, ezért mind párosak: az utolsó oszlopba és sorba kerülnek a páros számjegyek.

- Ezért az a kérdés, hogy az utolsó sor, ill. Utolsó oszlopba kerül-e, és ha igen, akkor hova a 0 számjegy.

- Mivel a tíz számjegy közül mind az 5 párosat fel kell használni a 3. sor és 3. oszlop kitöltéséhez: legalább 1 szám osztható lesz 5-tel.

- Ha a 0 a jobb alsó sarokba kerül, akkor két szám is osztható 5-tel.

- Mivel az összeolvasott számok 3-mal is oszthatóak, ezért soronként és oszloponként is oszthatóak 3-mal a számjegyek összegei. (Másrészról a 9 beírt számjegy összege is osztható 3-mal. A párosz számjegyek összege 20, ezért a páratlan számjegyek összege 3mal osztva 1 maradékot kell adnia.)

- Ha egy szám csupa 3-mal osztható számjegyből áll, akkor egy másiknak is olyannak kell lennie (amelyikek 0-ra ill. 6-ra végződnek), de ez nem lehetséges, mert csak két hárommal osztható páratlan számjegyünk van, holott 3 kellene. A páros jegyekből sem alkotható ilyen szám.

- Ezért minden sorban és oszlopban pontosan 1 hárommal osztható, 1 db 1 maradékot adó és 1 db 2 maradékot adó számjegy áll. Jelöljük meg ezért 0-val a 3-mal osztható számjegyeket, +-szal a 3-mal osztva 1 maradékot adókat és - -szal a 2 maradékot adókat.

- A páros számjegyek 0, 2, 4, 6, 8 sorban a 0, -, +, 0, - jeleket kapják. Az utolsó oszlop és utolsó sor közös számjegyének jele csak + lehet, mert abból csak 1 van: azaz a jobb alsó sarokba a 4-es kerül. - Legfeljebb egy 5-tel osztható szám lehet.

- *Pontosan egy szám lesz 5-tel osztható.*

- A bal alsó és a jobb felső sarokban nem lehet 0.

- Ez valóban meg is valósítható: 0, -, + jelekkel kell kitölteni a 3x3-as táblázatot úgy, hogy minden sorba és minden oszlopban van mindegyik jelből, továbbá a bal felső 2x2 részre -, +, +, 0 kerülhet csak. (Ezért a 3 és a 9 közül csak az egyiket használhatjuk. A 0 és a 6 végű szám valamelyik számjegye az 5 lesz.) Pl.

+-0 156

0+- 372

-0+ 804 egy jó kitöltést mutat.

Kiválasztások

40. feladat: Ököritófülpös-felső vasútállomásán minden évben állítanak karácsonyfát. Az állomásfőnöknek van hét különböző színű karácsonyfa-lámpácskája, amelyek egymástól függetlenül kapcsolhatók fel és le; szépérzéke azonban nem engedi, hogy a rózsaszín és a lila lámpácska egyszerre legyen a fán. Az állomásfőnök december 7-én felhelyez néhány lámpát a fára. Hányféleképpen választhatja ki őket, ha azt akarja, hogy a felhelyezett lámpák január 6-ig minden nap más kombinációban világítsanak a fán a megadott feltétel szerint?

Megoldás. December 7-től január 6-ig a két szélső időpontot is beleértve 31 nap van. Úgy kell tehát kiválasztani a lámpákat, hogy azok legalább 31-féle kombinációban tudjanak világítani. Minden lámpa vagy ég, vagy nem ég, ennek megfelelően egy lámpa esetén 2 lehetőség van a kivilágításra, két lámpa esetén 2·2, három lámpa esetén 2·2·2, stb. Ebből látszik, hogy legalább öt lámpát ki kell választani a hétből ahhoz, hogy a feltételek teljesüljenek. Öt lámpa választása esetén három lehetőségünk van: vagy a rózsaszínt hagytuk ki, vagy a lilát, vagy mindkettőt. Mindkettőt kihagyva 1 lehetőséget kapunk; ha a rózsaszínt kihagyjuk és a lilát nem, akkor a másik kihagyott 5-féle lehet, ez 5 lehetőség a lámpák kiválasztására; hasonlóan 5-féleképpen tehetjük meg, hogy kihagyjuk a lilát, s a rózsaszínt pedig nem. Ez összesen 11 lehetőség. Ha 6 lámpát választunk ki, akkor két lehetőséget kapunk: egyszer a lilát, egyszer a rózsaszínt hagyjuk ki. Mind a hét pedig nem szerepelhet együtt a fán. Tehát összesen 13-féleképpen lehet kiválasztani a lámpákat megfelelő módon.(Kömal K 20)

41. feladat:

Egy könyvtárban a következő módon választ 3 gyerek 5 féle könyv közül: az 5 féle könyv mindegyikéből egy-egy példány van egymás mellé kitéve egy asztalra, a

gyerekek pedig arra a könyvre teszik az olvasójegyüket, amelyiket ki szeretnék kölcsönözni (egyféle könyvet többen is kölcsönözhetnek, akár mind a hárman, ilyenkor több olvasójegy kerül ugyanazon könyvre, ám egy gyerek csak egy könyvet kölcsönözhet). Két olvasójegy-elrendezés különbözőnek számít, ha legalább egy gyerek nem ugyanazt a könyvet jelölte meg a két elrendezésben. Hány lehetőségük van összesen az olvasójegyek elhelyezésére?

Megoldás: Egy-egy gyerek 5 könyv közül választhat. A választásuk független egymástól, így hárman összesen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$-féleképpen választhatnak.

42. feladat: Öt különböző nagyságú barackunk, és három különböző nagyságú almánk van. Két csomagot kell készítenünk belőlük úgy, hogy mindkét csomagban négy-négy gyümölcs legyen, melyek egyike alma. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? (Két csomagolás akkor különböző, ha nem ugyanúgy osztottuk szét a különböző fajtájú és méretű gyümölcsöket.) (Kömal K.211.)

Megoldás: Mivel mindkét csomagban van alma, ezért a barackokat mindig egy hármas és egy kettes csoportra kell osztani. Ha az egyik csomagot megcsináljuk, akkor a másikba a maradék kerül: hányféle képen választhatunk a gyümölcsökből, hogy legalább egy alma van benne? Az öt különböző barackból a hármas csoportot (53)-féle képen választhatunk – ekkor a maradék 1 gyümölcsöt az almák közül háromféle képen választhatjuk. Ezek szerint $10 \cdot 3 = 30$-féle képen választhatjuk két csoportra a 8 gyümölcsöt. Ugyanezt kapjuk, ha a 2 barack-2 alma csomagok számát számoljuk ki: $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 10 \cdot 3 = 30$. A csomagok sorrendje nem számít: 30 szétosztás lehetséges.

43. feladat: Kati egy olyan gombot varr fel a kabátjára, melyen négy lyuk van, az *ábrán* látható elrendezésben (egy négyzet négy csúcsában vannak a lyukak). A cérnát a lyukakon átbújtatva újra és újra a cérna különböző mintákat hozhat létre a gombot szemből nézve. Egy ilyen minta látható az *ábrán.* Hányféle mintát láthatunk a varrás után, ha a gomb felvarrásához az szükséges, hogy minimum két lyukat használjunk?

Megoldás. Bármelyik két lyuk vagy össze van kötve cérnával, vagy nem. Ez minden lyukpárra nézve 2 lehetőség. Mivel összesen $\binom{4}{2} = 6$ lehetséges lyuk-páros van, ez $2^6 = 64$ lehetőség lenne, azonban ebből ki kell vonni azt az egy esetet, amikor semelyik két lyuk nincs összekötve.

Tehát 63 mintát láthatunk a varrás után. (Kömal K.379)

44. feladat:

6 db A és 7 db B betűből készítünk betűsorokat a betűk egymás mellé írásával. Hány olyan betűsort tudunk készíteni, amely palindrom, azaz oda-vissza olvasva ugyanaz?

Megoldás. Középen B betűnek kell lennie, és az egyik és másik oldalra is 3-3 db A, illetve B betűt kell elhelyeznünk. Ezt az egyik oldalon összesen $\binom{6}{3}$ féleképpen tehetjük meg. A szimmetria miatt a másik oldalon már nincs választásunk. Tehát 20 palindrom szám készíthető a megadott betűkből. (Kömal K. 380)

Feladatok sakktáblán

45. feladat: Hányféleképpen tehetünk fel a sakktáblára egy királyt és egy bástyát, hogy egyik se üsse a másikat? (A sakktábla mezői a szokásos módon betűkkel és számokkal vannak jelölve; két helyzet különbözőnek számít, ha legalább az egyik bábu másik mezőn áll a két helyzetben.)

Megoldás: Vizsgáljuk meg, hogy a király elhelyezkedése szerint hányféle helyre kerülhet a bástya.

A) A király a tábla sarkában van (erre négy lehetőség van). Ekkor a bástya nem kerülhet a király sorába és oszlopába, valamint a király helyével átlósan szomszédos egyetlen mezőre (ez összesen 16 mező). A bástya tehát 48 mezőn állhat, így ebben az esetben $4 \cdot 48=192$ lehetőséget kapunk.

B) A király a tábla szélén áll, de nem a sarokban (a táblán 24 ilyen mező van). Ekkor a bástya nem kerülhet a király sorába és oszlopába, valamint a király helyével átlósan szomszédos két mezőre (ez összesen 17 mező). A bástya tehát 47 mezőn állhat, így ebben az esetben $24 \cdot 47=1128$ lehetőséget kapunk.

C) A király nem a tábla szélén áll (a táblán 36 ilyen mező van). Ekkor a bástya nem kerülhet a király sorába és oszlopába, valamint a király helyével átlósan szomszédos négy mezőre (ez összesen 19 mező). A bástya tehát 45 mezőn állhat, így ebben az esetben $36 \cdot 45=1620$ lehetőséget kapunk. A három esetből összesen $192+1128+1620=2940$ lehetőség adódik a kívánt elhelyezésekre. (Kömal K. 45)

46. feladat: A 3×3-as sakktábla mezőibe úgy írtunk egy-egy számjegyet, hogy bármely mezőről L-alakban (ahogyan a huszár lép) csúsztatva a bábut a négy érintett mezőn levő szám összege mindig ugyanaz az érték. Hányféleképpen tölthető ki ilyen módon a sakktábla, ha minden mezőre írtunk egy, a többitől nem feltétlenül különböző számjegyet?

Megoldás. Írjunk a kilenc mezőbe $a, b, \ldots, i$ betűket.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$a+d+e+f=g+d+e+f$, így $a=g$. Hasonlóan megmutatható, hogy $a=g=i=c$. Továbbá $a+d+g+h=b+a+d+g$, így $b=h$. Hasonlóan megmutatható, hogy $d=f$. Továbbá $d+e+f+c=h+e+b+c$, így $b=h$ és $d=f$ miatt $2d=2h$ tehát $d=h$. Ez viszont azt jelenti, hogy $d=h=f=b$. Továbbá $a+d+g+h=a+b+e+h$, így $a=e$. Ezek alapján a megfelelő kitöltéshez egy vagy két számjegyet használhatunk fel összesen. Két számjeggyel való kitöltésre 90 (mert számít, hogy melyik számjegy kerül a sarkokba és középre, és melyik a maradék helyekre), egy számjeggyel való kitöltésre 10 lehetőségünk van. Az összes megfelelő kitöltések száma tehát 100. (Kömal, K.95)

Állapotjelző használata, konstrukció készítése

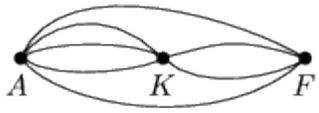
47. feladat: András, Béla , Csaba, Dénes, és Elemér egy asztal körül ülnek. Andrásnál kezdetben 5 kavics van, a többinél egy sincs. Egy lépés abból áll, hogy valaki, akinél legalább két kavics van, a két szomszédjának ad egyet-egyet. El tudják-e érni, hogy néhány lépés után mindannyiuknál pontosan egy kavics legyen? (Arany Dániel 201062011. 1. forduló)

Megoldás: www.szolda.hu

Gráfok

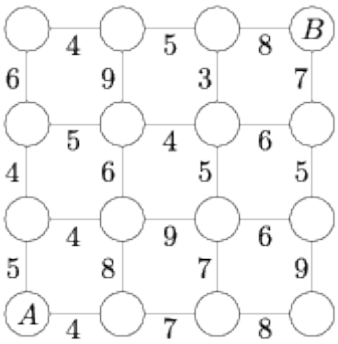
48. feladat:

Alsóhuta, Felsőhuta és Középhuta között számos út vezet. Tudjuk azonban, hogy bármely két falu között a közvetlen utak száma legalább 3 és legfeljebb 10. Alsóhutáról Felsőhutára eljuthatunk közvetlenül, valamint Középhután keresztül is, összesen 33 különböző útvonalon. Hasonlóan Középhutáról Felsőhuta közvetlenül, valamint Alsóhuta érintésével is megközelíthető, összesen 23 különböző módon. Hány különböző útvonal vezet összesen Középhutáról Alsóhutára (közvetlenül, illetve Felsőhután keresztül)?

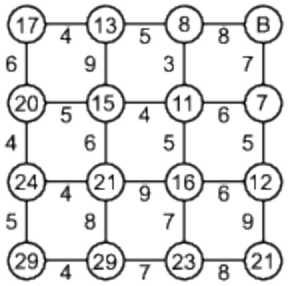


Jelöljük x-szel Alsóhuta és Felsőhuta, y-nal Középhuta és Felsőhuta, z-vel Középhuta és Alsóhuta között a közvetlen utak számát. Ekkor Alsóhutáról Felsőhutára összesen $x+y\cdot z$ különböző útvonalon lehet közlekedni. Hasonlóan Középhuta és Felsőhuta között $y+x\cdot z$ útvonalon, végül Középhuta és Alsóhuta között $z+y\cdot x$ útvonalon. Tudjuk, hogy $x+y\cdot z=33$ és $y+x\cdot z= 23$, a két egyenlet megfelelő oldalainak különbségét véve, és $(y-x)$-et kiemelve: $(y-x)\cdot(z-1)=10$. Mivel x, y, z egész számok, a 10-et kell két egész szorzatára bontani, és megvizsgálni, melyik elégíti ki a fenti két egyenletet. Felhasználva, hogy $3 \leq z \leq 10$, csak két lehetőség marad z értékére: $z=3$, ekkor $y-x=5$; vagy $z=6$, ekkor $y-x=2$. Észrevehetjük továbbá, hogy z mindkét esetben osztható 3-mal, így az első egyenletből adódóan x-nek is oszthatónak kell lennie 3-mal. Ha $z=3$, akkor x értéke csak 3 lehet, mert ha legalább 6 lenne, akkor y már 10-nél több lenne. De a második egyenlet így sem teljesülhet, hiszen y már 14 lenne. Tehát z értéke csak 6 lehet. Ekkor az $(x;y)$ számpár lehetséges értékei: (3;5) vagy (6;8). Az első számpár minden szempontból jónak bizonyul, a második viszont túl nagy akármelyik egyenlethez. Az egyetlen jó megoldás tehát: $x=3$, $y=5$, $z=6$, így $z+y\cdot x=21$, azaz Alsóhutáról Középhutára 21 különböző útvonalon lehet eljutni. (Kömal K14)

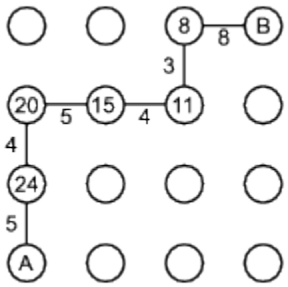
49. feladat: Az *ábrán* egy városrész térképvázlata látható. A körök az utcasarkokat (kereszteződéseket), a vonalak az őket összekötő útszakaszokat jelzik. Minden útszakasznál feltüntettük, hogy gyalog hány perc alatt tehetők meg. Mennyi a lehetséges legkisebb időtartam, amely ahhoz szükséges, hogy eljussunk A pontból B pontba, feltéve, hogy az ábrán mindig csak jobbra vagy felfelé haladunk? (Kömal K. 25)



Megoldás: A leggyorsabb utat a legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, ha B-ből visszafelé indulva minden körbe beírjuk, hogy onnan legkevesebb mennyi idő alatt lehet megközelíteni B-t. Így sorban haladva, és mindig felhasználva a korábban egy adott kereszteződésre megállapított minimális értéket, az alábbi ábrát kapjuk:



Tehát a lehető leggyorsabb út 29 perc, és ez az alábbi útvonallal érhető el:



50. feladat: Egy országban 9 nagyváros van. Ezek közül mindegyikből pontosan 4 nagyvárosba van oda és vissza is repülőjárat. Bizonyítsa be, hogy bármely nagyvárosból legfeljebb egy átszállással bármely nagyvárosba el lehet jutni!(Arany Dániel 2007/2008. 1.forduló)

Megoldás: szolda.hu

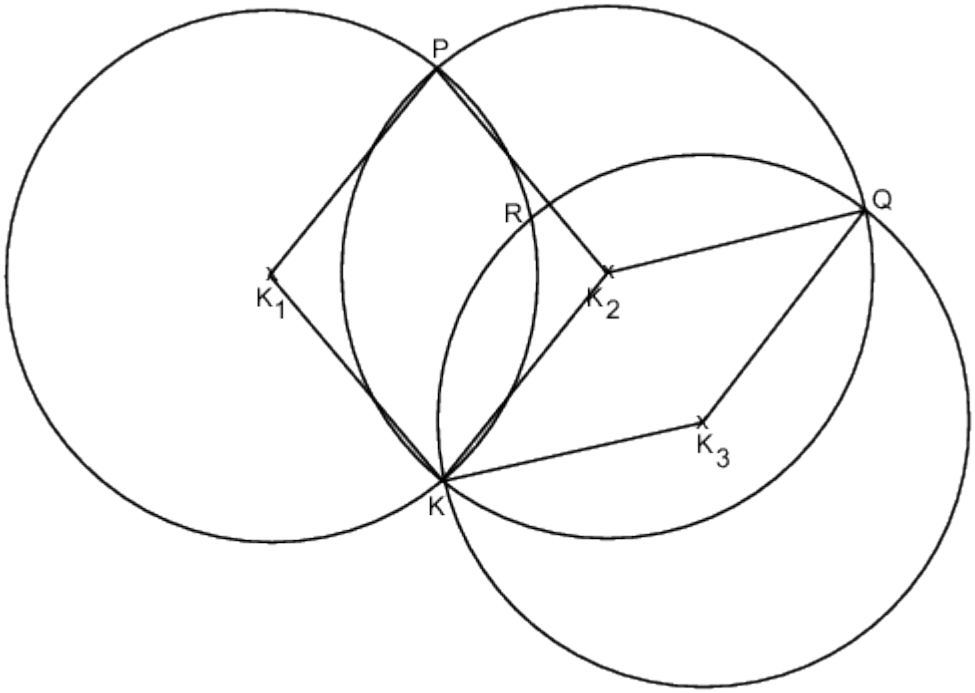
Geometria

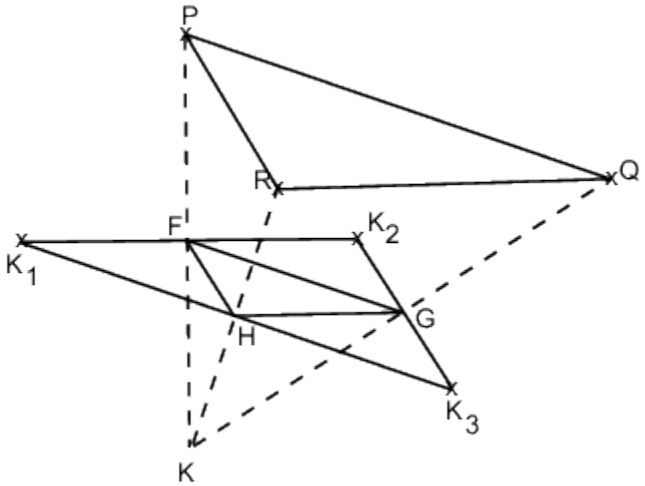
Bizonyítás háromszögekben

51. feladat: Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza: befogói α és β, átfogója χ. Az átfogójához tartozó magasság hossza μ. Igazolja, hogy: $\chi + \mu > \alpha + \beta$. (Arany Dániel 2006/2007. 1.forduló)
Megoldás: szolda.hu

52. feladat: Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges háromszög súlyvonalának hossza kisebb az őt közrefogó háromszögoldalak számtani közepénél. (Kömal K216)
Megoldás: Legyen F az AB szakasz felezőpontja, AC=b, BC=a, FC=s. Tükrözzük a háromszöget F-re. A kapott AC'BC négyszögben CFC' egyenesszög, CF súlyvonal képe FC', rehát ugyanolyan hosszú, ugyanígy AC' oldal hossza megegyezik BC-ével. Az AC'B háromszög oldalai a, b és 2s. A háromszög-egyenlőtlenség szerint a+b>2s, tehát $(a+b)/2>s$, azaz a súlyvonal hossza kisebb, mint a közrefogó oldalak hosszának számtani közepe.

53. feladat: A K_1, K_2, K_3 középpontú r sugarú körök mindegyikére illeszkedik a K pont. Két-két kör további közös pontja a P, Q, illetve R pontok. Mutassuk meg, hogy a $K_1K_2K_3$ és a PQR háromszögek egybevágók.
Megoldás:





Használjuk az ábrák jelöléseit! Ha két egyforma sugarú kör metszi egymást két pontban, akkor a körök középpontjai és metszéspontjai egy rombuszt alkotnak, a kétirányú tengelyes szimmetria miatt. Ennek megfelelően (az ábra jelöléseit használva) a K_1KK_2P négyszög rombusz, tehát K_1K_2 és KP szakaszok kölcsönösen merőlegesen felezik egymást. Hasonlóan K_2K_3 és KQ, valamint K_1K_3 és KR szakaszok is. A megfelelő felezőpontokat jelölje F, G, H. Innen kétféleképpen lehet befejezni.

I. befejezés: A korábban mondottak miatt a PRK háromszögben FH középvonal, tehát párhuzamos PR-rel és feleakkora, mint PR. Ugyanakkor FH középvonal a $K_1K_2K_3$ háromszögben is, tehát párhuzamos K_2K_3-mal és feleakkora, mint K_2K_3. Ebből következik, hogy PR párhuzamos és egyenlő K_2K_3-mal, Hasonlóan mutatható meg, hogy PQ párhuzamos és egyenlő K_1K_3-mal és QR párhuzamos és egyenlő K_2K_1-gyel. Tehát a $K_1K_2K_3$ háromszög és a PQR háromszög egybevágók, mert megfelelő oldalaik egyenlők (és párhuzamosak is).

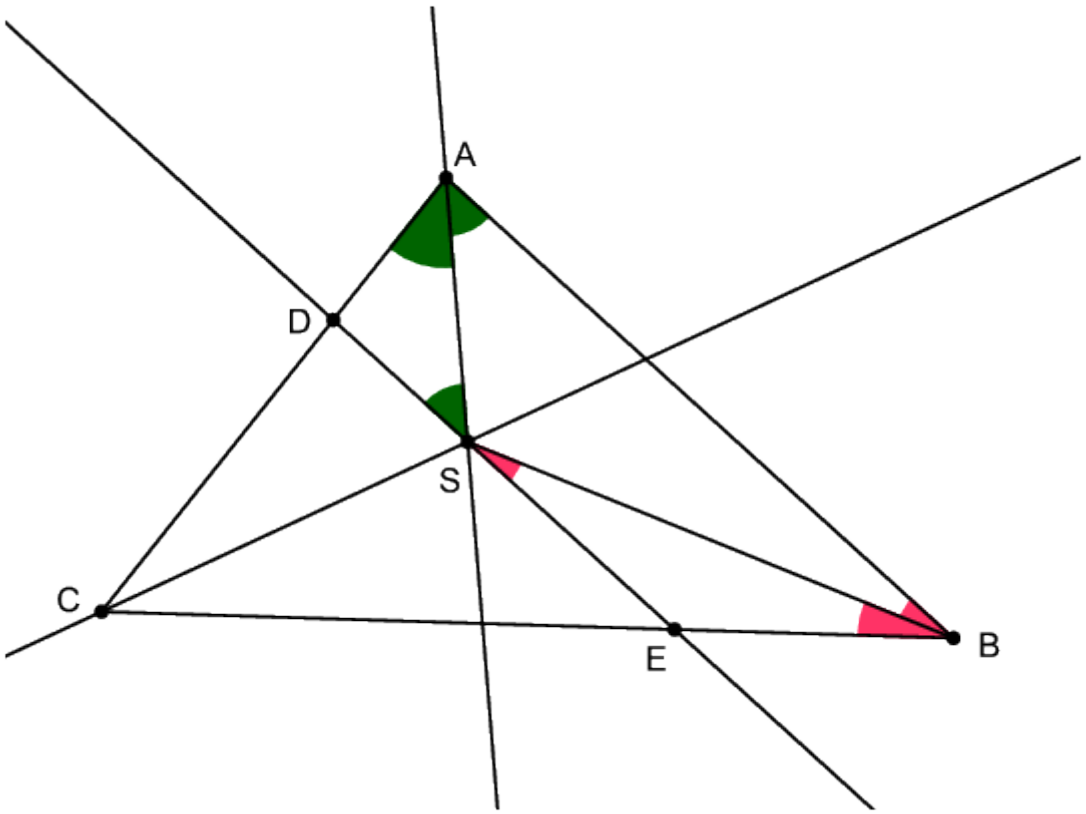
II. befejezés: Az elmondottakból következően az *FGH* háromszöget a *K* pontból kétszeresére nagyítva a *PQR* háromszöget kapjuk. Mivel *FGH* a $K_1K_2K_3$ háromszög középvonalai által alkotott háromszög, ezért ahhoz hasonló, és a hasonlóság aránya 1/2. (A hasonlóság középpontja a $K_1K_2K_3$ háromszög súlypontja.) Tehát a $K_1K_2K_3$ háromszög és a *PQR* háromszög egybevágók. (A $K_1K_2K_3$ háromszöget a súlypontjából 1/2 arányban kicsinyítjük, majd a kapott háromszöget K-ból kétszeresére nagyítjuk, és így kapjuk a *PQR* háromszöget.) (Kömal, K.75)

54. feladat:
Legyen az *ABC* hegyesszögű háromszögben az *A*-ból induló magasság talp pontja *T*, a háromszög köré írt kör középpontja *O* és sugara *R*. Bizonyítsa be, hogy ha az *AT* szakasz hossza *R*, akkor az *OT* szakasz merőleges az *A*-ból induló szögfelezőre. (Arany Dániel 2008 /2009. 1. forduló)
Megoldás: szolda. hu

55. feladat: Az *ABC* tompaszögű háromszögben az *A* csúcsnál van a tompaszög. A háromszög beírható körének középpontja legyen *S*. Az *S*-en át *AB*-vel húzott párhuzamos messe az *AC* oldalt *D*-ben és a *BC* oldalt *E*-ben. Bizonyítsuk be, hogy *DE=AD+BE*.

Megoldás. *BAS∠=DSA∠*, mert váltószögek. *DAS∠=BAS∠*, mert *AS* szögfelező. Így *DSA∠=DAS∠*, vagyis az *ADS* háromszög egyenlő szárú. Így *AD=DS*.

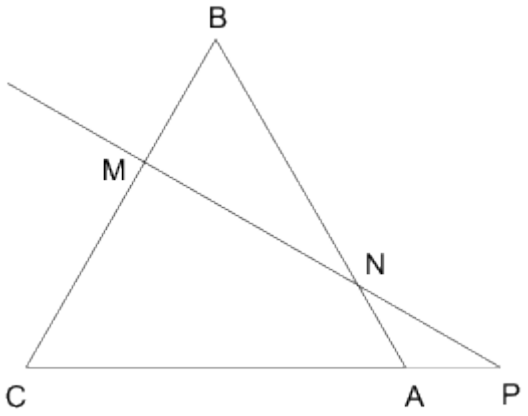
Hasonlóan lehet belátni, hogy *BE=SE*. Így pedig *DE=DS+SE=AD+BE*.



30, 60, 90 fokkal rendelkező derékszögű háromszög felismerése, és alkalmazása

56. feladat: A 16 cm oldalhosszúságú *ABC* szabályos háromszög *AC* oldalát meghosszabbítottuk az *A*-n túl az *AC* oldal negyedével és így a *P* pontot kaptuk. A *P* pontot kössük össze az *AB* oldal *A*-hoz közelebbi negyedelő pontjával. Az így kapott egyenes mekkora részekre vágja a *BC* oldalt?

Megoldás. Legyen az *AB* oldal *A*-hoz közelebbi negyedelőpontja *N*, *PN* és *BC* metszéspontja *M*. Ekkor a *PAN* háromszög egyenlő szárú, melynek alapon fekvő szögei 30 fokosak. Emiatt a *BNM* háromszög szögei 30, 60, 90 fokosak. Mivel *BN*=12 cm, ezért *BM*=6 cm és *MC*=10 cm.



(Kömal, K. 96)

57. feladat: Az *ABC* szabályos háromszög *AB* alapját meghosszabbítottuk az *A* csúcson túl az *AB* oldal hosszának kétötödével, és így a *P* pontot kaptuk. A *P* pontot összekötöttük az *AC* oldal *A* csúcstól számított második ötödölő pontjával, a *Q* ponttal. Az így kapott egyenes a *CB* egyenest az *R* pontban metszi. Milyen hosszú a *CR*, ha *AP*=2684?

Megoldás. $PA=QA=25\cdot AB=2684$, amiből egyrészt $AB=6710$, másrészt $APQ\angle=AQP\angle=180^\circ-60^\circ 2=30^\circ$ következik. Mivel $RQC\angle=AQP\angle=30^\circ$ és $QCR\angle=ACB\angle=60^\circ$, ezért $CRQ\angle=180^\circ-(RQC\angle+QCR\angle)=90^\circ$ és a CRQ háromszög egy szabályos háromszög fele. Ebből következik, hogy
$CR=QC/2=(AC-AQ)/2=(6710-2684)/2=4026/2=2013$.

Területszámítás háromszögekben

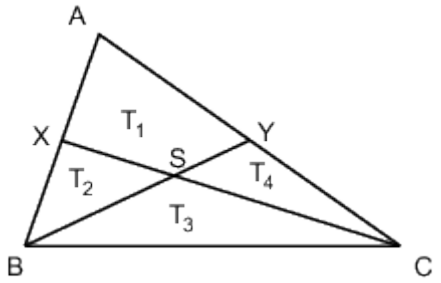
58. feladat:

Az háromszögben *X* az *AB*, *Y* az *AC* oldal felezőpontja; *BY* és *CX* metszéspontja *S*. Mutassuk meg, hogy:

a) az *SBX* és az *SCY* háromszögek területe egyenlő;

b) az *SBC* háromszög és az *AXSY* négyszög területe egyenlő.

Megoldás

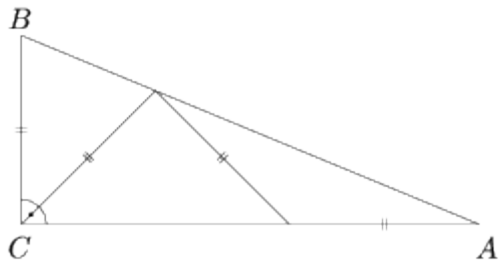


a) *XY* a háromszög középvonala, mely párhuzamos *BC*-vel. Ezért *XBY* és *XCY* háromszögek területe egyenlő, mert alapjuk (*XY*) és hozzá tartozó magasságuk (*XY* és *BC* párhuzamos egyenesek távolsága) is megegyezik. *SBX* háromszög területe úgy adódik, hogy *XBY* háromszög területéből kivonjuk *YSX* háromszög területét, *SCY* háromszög területe úgy adódik, hogy *XCY* háromszög területéből kivonjuk *YSX* háromszög területét. Mivel egyenlő területekből vonjuk ki ugyanazt a területet, ezért az eredmények is megegyeznek. Tehát *SBX* és *SCY* háromszögek területe egyenlő.

b) Mivel *BY* súlyvonal, ezért felezi az *ABC* háromszög területét. T_1-et úgy kapjuk, hogy az *ABC* háromszög területének feléből kivonjuk T_2-t, T_3-at pedig úgy kapjuk, hogy az *ABC* háromszög területének feléből kivonjuk T_4-et. Mivel $T_2=T_4$, ezért $T_1=T_3$, tehát *SBC* háromszög és *AXSY* négyszög területe megegyezik. (Kömal K. 63)

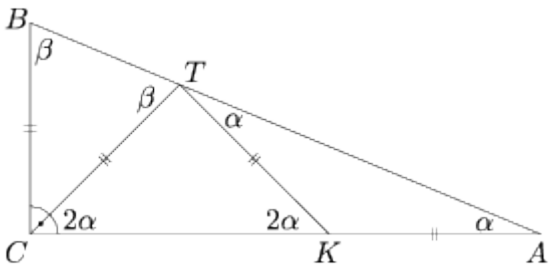
Számolásos példák háromszögekben

59. feladat: Mekkorák a derékszögű háromszög hegyesszögei, ha az *ábrán* látható módon három egyenlő szárú háromszögre tudjuk felbontani?



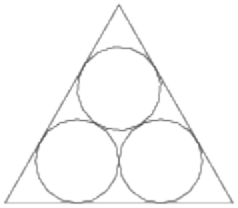
Megoldás: Nevezzük a háromszög *A* csúcsánál levő hegyesszögét α-nak, a *B*-nél levő hegyesszöget β-nak. Az *ábrán* bejelöltük az egyenlő szárú háromszögek segítségével kiszámítható szögek nagyságát.

Mivel α és β összege 90°, azért a *CTK* háromszög *T*-nél levő szöge derékszög, vagyis $2\alpha+2\alpha=90°$, innen $\alpha=22{,}5°$, $\beta=67{,}5°$.



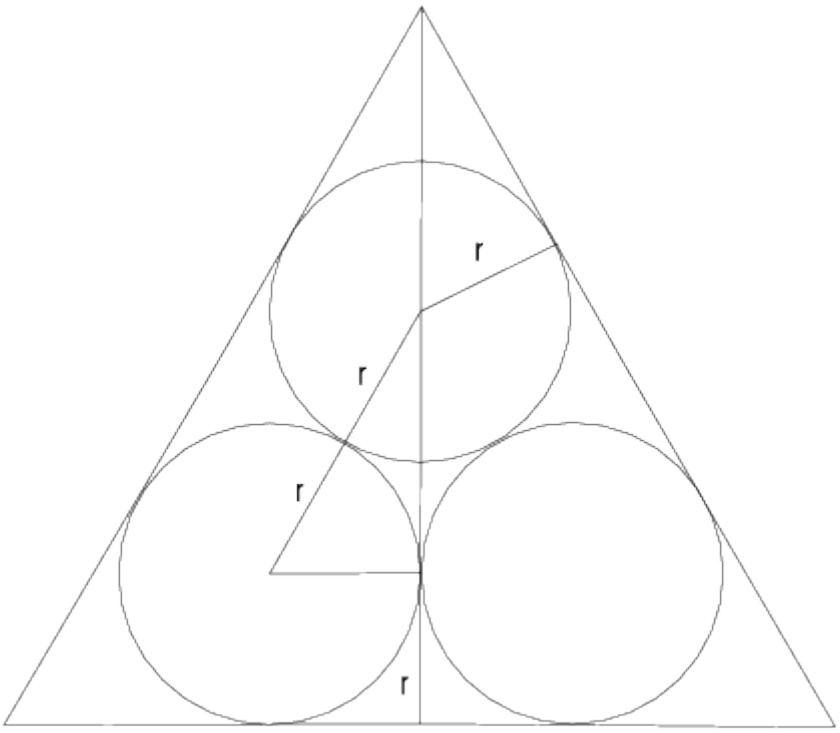
(Kömal K.44)

60. feladat: Mekkora az *ábrán* látható három egybevágó kör sugara, ha a szabályos háromszög 12 cm oldalhosszúságú?



Megoldás: A szabályos háromszög oldala 12 cm, tehát magassága $6\sqrt{3}$ cm. A kis kör sugarát nevezzük el *r*-nek, ekkor az ábra alapján a háromszög magassága

$r + \sqrt{3}r + 2r = 3r + \sqrt{3}r$. Tehát $3r + \sqrt{3}r = 6\sqrt{3}$. Ebből: $r = \dfrac{6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ cm, egyszerűbb alakban $3\sqrt{3} - 3 \approx 2,2$ cm.



(Kömal. K. 89)

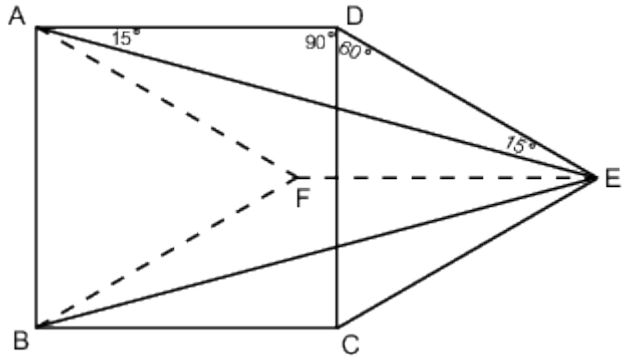
61. feladat:

Az 5 cm oldalhosszúságú *ABCD* négyzet *CD* oldalára kifelé megrajzoltuk a *CDE* szabályos háromszöget.

a) Határozzuk meg az *ABE* háromszög szögeinek nagyságát.

b) Mekkora a sugara annak a körnek, amelyre az *ABE* háromszög mindhárom csúcsa illeszkedik?

Megoldás:



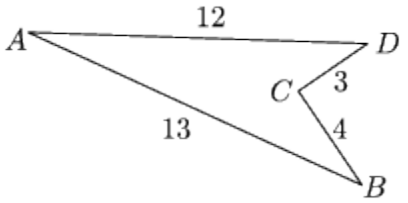
a) Az *ADE* szög 150°, mivel *ADC* szög 90° és *CDE* szög pedig 60°. Az *ADE* háromszög egyenlő szárú háromszög, ezért *DAE* szög nagysága 15°. Mivel *BAD* szög 90°, ezért *BAE* szög 75°. A szimmetria miatt *ABE* háromszög egyenlő szárú, tehát *ABE* szög is 75°-os. Így az *AEB* szög nagysága 30°.

b) Toljuk el a *DCE* háromszöget az *ABF* háromszögbe. Az eltolás 5 cm-en történt (a négyzet oldala mentén), így *EF* hossza 5 cm. Másrészt viszont az eltolt szabályos háromszög minden oldala szintén 5 cm hosszú, tehát az *F* pont 5 cm távolságra van *A*, *B* és *E* pontoktól. Ez azt jelenti, hogy az *ABE* háromszög minden csúcsa illeszkedik az *F* közepű, 5 cm sugarú körre. Tehát a keresett sugár hossza 5 cm. (Kömal, K.73)

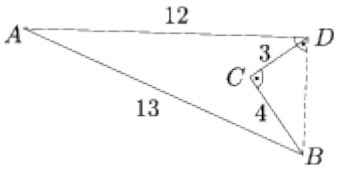
62. feladat: Az ABC háromszögbe beírható kör a BC oldal A_1-ben, az AC oldalt B_1-ben, az AB oldalt C_1-ben érinti. Ugyanígy kapjuk az $A_1B_1C_1$ háromszögből az $A_2B_2C_2$ háromszöget. Mekkorák az ABC háromszög szögei, ha ugyanakkorák, mint az $A_2B_2C_2$ háromszög szögei ? (A-nál levő szög megegyezik az A_2-nél levő szöggel, B-nél levő szög megegyezik a B_2-nél levő szöggel.) /Arany Dániel 2009/2010, 1. forduló/

Megoldás: www. szolda.hu

63. feladat: Az *ABCD* konkáv négyszög oldalai *AB*=13 cm, *BC*=4 cm, *CD*=3 cm, *DA*= 12 cm, a *C* csúcsnál lévő belső szöge pedig 270°. Mekkora a négyszög területe?

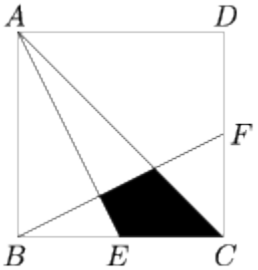


Megoldás. A *BCD* háromszög egy 3 és 4 befogójú derékszögű háromszög. Ennek harmadik oldala a Pitagorasz-tétel miatt 5 cm, területe pedig 6 cm^2. Az *ADB* háromszög oldalaira teljesül, hogy a két kisebb oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a legnagyobb oldalhossz négyzetével, így a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint az *ABD* háromszög is derékszögű a *D* csúcsánál, tehát területe 30 cm^2. A négyszög területe a két háromszög területének különbsége, azaz 24 cm^2



64. feladat: Az *ABCD* négyzet oldalainak hossza 30 cm. A *BC* oldal felezőpontja *E*, a *CD* oldal felezőpontja *F*. Számítsa ki a besötétített rész területét! (Arany Dániel 2006/2007. 1.forduló)

Megoldás: szolda.hu



65. feladat: Egy téglalapot az oldalaival párhuzamos vágásokkal kilenc darabra vágtunk. Az egyes darabokba beleírtuk a területüket cm^2-ben kifejezve. Mennyi az *x*-szel jelölt darab területe?

4	5	
	12	30
8		x

(Kömal. K213)

Megoldás: Felhasználjuk, hogy az egy sorban levő téglalapok területének az aránya az oszlopok szélességének az arányával egyezik meg. Ugyanígy az azonos oszlopban levő téglalapok területének aránya a sorok magasságának arányával egyezik meg. Így az első sor utolsó téglalapjának területe (30/12)·5=12,5.

Mivel az első oszlop alsó téglalapja kétszer akkora területű, mint a felső, ezért ez áll a harmadik oszlop megfelelő celláinak területére is. Tehát x=25.

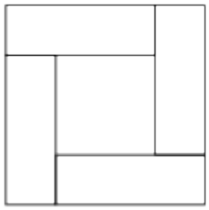
66. feladat:

Egy téglalapot az oldalaival párhuzamos vonalakkal kisebb téglalapokra daraboltunk. A daraboló vonalak egymástól való távolsága változó (az *ábra* nem tükrözi a vonalak egymástól való távolságának arányát). Néhány téglalapba beleírtuk, hogy hány egység a területe. Mekkora az y-nal jelölt téglalapterület?

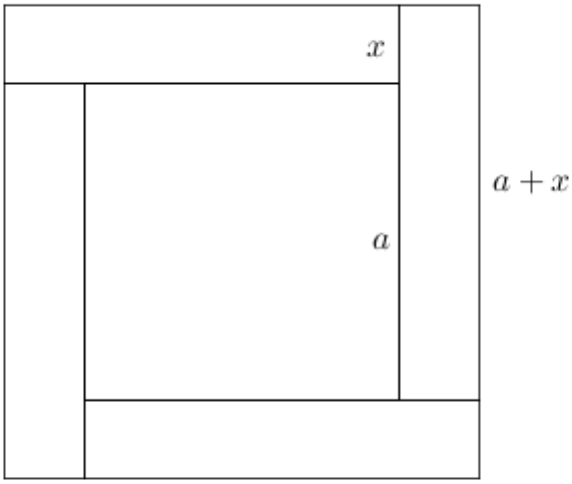
14		6 20	
21			
	52	39	
	20		30
		40	y

Megoldás. A 2009. szeptemberi K. 213 szerint legyenek a sorok *i, ii, ... v* jelölésűek, az oszlopok pedig *I, II, ... , V* jelölésűek, az egyes téglalapot (és a területét is) pedig a sor és oszlop sorszámával jelöljük, az oszlopok szélességét s, a sorok magasságát pedig m. Ekkor 52/39=4/3 miatt $s_{II}=4x$, $s_{III}=3x$. Ezért $t_{iv,III}=20\cdot 3/4=15$. Innen $s_V=6x$. Másrészről a *IV* oszlopban 20/40=1/2 miatt $m_i=a$ és $m_v=2a$, tehát $t_{v,III}=6\cdot 2=12$. Mivel *V* oszlop kétszer olyan széles, mint *III*, ezért $y=12\cdot 2=$**24**. Az eredményhez természetesen más téglalapok területének kiszámításával is el lehet jutni.(Kömal K 218)

67. feladat: Négy egyforma téglalapot az *ábrán* látható módon illesztettünk össze. A négy téglalap egy nagy négyzetet hoz létre, belül pedig szintén egy négyzetet határolnak. A belső négyzet kerülete megegyezik egy téglalap kerületével. Mennyi a külső négyzet és a belső négyzet területének aránya?

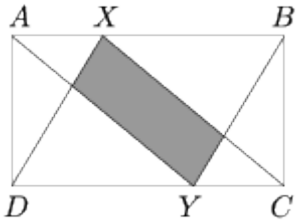


Megoldás. A belső négyzet oldalának hossza legyen a, a téglalap négyzetre nem illeszkedő oldalának hossza pedig legyen x. Ekkor a másik oldalának hossza $a+x$. A kerületek egyezősége miatt $4a=2x+2(a+x)$, amiből $a=2x$. Így a külső négyzet oldalának hossza $a+x+x=4x$, tehát a négyzetek oldalának aránya 2:1, területük aránya pedig 4:1.

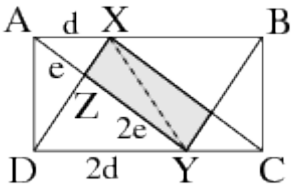


(Kömal K.387)

68. feladat: Az *ABCD* téglalap *AB* oldalának harmadolópontja *X*, *CD* oldalának harmadolópontja *Y* az *ábrának* megfelelően. Határozzuk meg, hogy az *ábrán* szürkével jelölt síkidom területe hányadrésze az *ABCD* téglalap területének.



Megoldás. Az ábra szimmetriája miatt a satírozott négyszög paralelogramma. Rajzoljuk be ennek *XY* átlóját! Ez az átló felezi a paralelogramma területét. Az *AXY* háromszög területe az *ABCD* téglalap területének hatodrésze (alapja az *AB* harmadrésze, magassága *BC*). A *DYZ* háromszög oldalai kétszer akkorák, mint az *AXZ* háromszögé, mert a két háromszög hasonló. Így *Z* az *AY* szakasz harmadolópontja, ezért az *XYZ* háromszög területe az *AXY* háromszög területének kétharmada. Tehát az *XYZ* háromszög területe a téglalap területének hatodának kétharmada, azaz egykilencede. A paralelogramma területe ennek kétszerese, vagyis a téglalap területének 2/9 része.

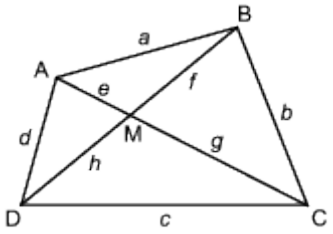


Bizonyítás négyszögekben

69. feladat:

Igazoljuk, hogy egy tetszőleges konvex négyszög átlóinak összege nagyobb, mint a kerületének a fele, de kisebb, mint a kerülete. (Kömal K. 30)

Megoldás: Tekintsünk egy konvex négyszöget:

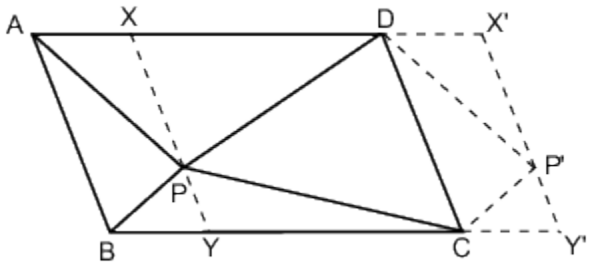


Jelöljük az átlók metszéspontjától a csúcsokig húzott szakaszok hosszát az ábrának megfelelően *e*, *f*, *g*, *h*-val. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az ábrán látható négy kis háromszögben: $a < e + f$, $b < f + g$, $c < g + h$, $d < h + e$. A kapott egyenlőtlenségeket összeadva $a + b + c + d < 2(e + f + g + h)$. A bal oldalon a kerület, a jobb oldalon az átlók összhosszának kétszerese látható, melyből 2-vel való osztás után kapjuk az első bizonyítandó állítást. A második állítás bizonyításához írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az *ABD*, *ABC*, *BCD*, *CDA* háromszögekben: $a + d > h + f$, $a + b > e + g$, $b + c > h + f$, $c + d > e + g$. Az egyenlőtlenségeket összeadva, és a kapott egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel osztva az $a + b + c + d > e + f + g + h$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami éppen a második bizonyítandó állítás.

70. feladat:

Egy paralelogramma belsejében vegyünk fel egy pontot, majd kössük össze a paralelogramma csúcsaival. Mutassuk meg, hogy az így kapott négy szakaszból szerkeszthető egy olyan négyszög, melynek csúcsai a paralelogramma oldalain vannak.

Megoldás:

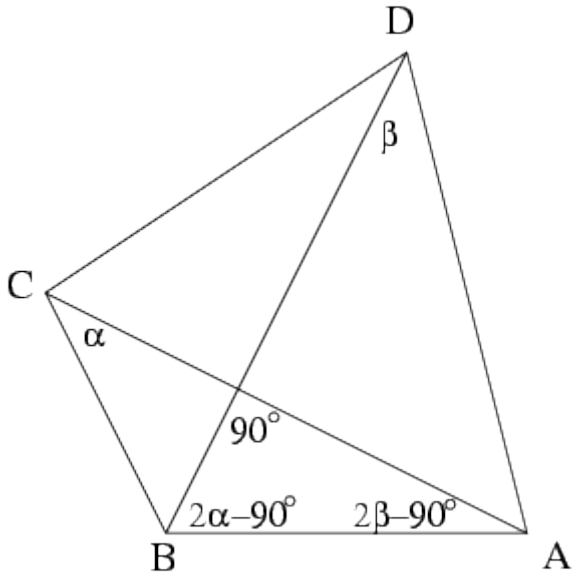


Használjuk az ábra jelöléseit! Fektessünk a *P* pontra a paralelogramma egyik oldalával párhuzamos egyenest, ez a paralelogramma megfelelő oldalait az *X* és *Y* pontokban metszi. Toljuk el az *ABXY* paralelogrammát *AD*-vel párhuzamosan úgy, hogy az *A* pont *D*-be kerüljön. Az eltolás során az *X, P, Y, B* pontok rendre az *X'*, *P'*, *Y'*, *C* pontokba kerülnek át. Mivel *AX=DX'*, ezért *AD=XX'*; továbbá *AB=XY=DC=X'Y'*. Ezek szerint a kapott *XYY'X'* paralelogramma az *ABCD* paralelogrammával egybevágó, hiszen a megfelelő oldalak párhuzamosak és egyenlők. Ebben a paralelogrammában a *PCP'D* négyszög éppen a *PA, PB, PC, PD* szakaszokból szerkesztett négyszög, melynek csúcsai a paralelogramma oldalain vannak. Ha az *XYY'X'* paralelogrammát visszatoljuk az *ABCD* paralelogrammába, akkor a *PCP'D* négyszög eltoltja éppen a keresett szerkesztendő négyszög. (Kömal. K.68)

Számolás négyszögekben

71. feladat: Az *ABCD* négyszögben *AB=AC=DB*, továbbá az átlók merőlegesek egymásra. Határozzuk meg az *ACB* szög és az *ADB* szög összegét.

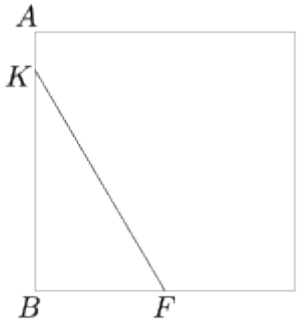
Megoldás: Jelölje az *ACB* szöget α, az *ADB* szöget β, az átlók metszéspontját *E*. Az *ECB* derékszögű háromszögben *EBC* $\angle=90^o-\alpha$, az *EDA* derékszögű háromszögben *EAD* $\angle=90^o-\beta$. Az *ACB* egyenlő szárú háromszög, tehát *ABC* $\angle=\alpha$, így *ABE* $\angle=\alpha-(90^o-\alpha)=2\alpha-90^o$. Hasonlóan kapjuk az *ABD* egyenlő szárú háromszög felhasználásával, hogy *BAE* $\angle=\beta-(90^o-\beta)=2\beta-90^o$. Az *ABE* derékszögű háromszöget tekintve $2\beta-90^o+2\alpha-90^o=90^o$, innen $\alpha+\beta=135^o$. (Kömal K. 50)



72. feladat: Az 1 m^2-es asztallapra leraktunk négy darab 32 dm^2-es és kettő darab 21 dm^2-es kartonlapot. Ezek egyike sem lóg le az asztalról. Igaz-e, hogy van két olyan kartonlap, amelyek legalább 4 dm^2-en fedik egymást?

Megoldás. Ha bármelyik két kartonnak 4 dm^2-nél kisebb a közös része, akkor az első lap 32 dm^2-t, a második 32-4 dm^2-nél többet, a harmadik 32-2·4 dm^2-nél többet, a negyedik 32-3·4 dm^2-nél többet foglal el. Így ezek összesen több, mint 4·32-6·4=104 dm^2-t fednének le. Vagyis nem lehet bármelyik két kartonnak a közös része 4 dm^2-nél kisebb. (Kömal, K.102)

73. feladat: Egy 100 m oldalhosszúságú, négyzet alakú füvesített teret a határvonala mentén kövezett járda vesz körbe. Az emberek leggyakrabban a négyzet alakú terület A sarkától a szemközti oldal *F* felezőpontjába szeretnének eljutni. Ezt úgy is megtehetik, hogy a terület határa mentén a kövezett járdán közlekednek az *ABF* útvonalon, de néhányan gyalogutat alakítottak ki a füvön keresztül úgy, hogy elindultak az *AB* oldal mentén, majd egyenesen átvágtak a téren *F* felé, az *ábrán* látható módon. Így a határ mentén megtett úthoz képest 25%-kal kevesebb utat kell megtenniük. Milyen messze van az *A* ponttól a füvön keresztül vezető gyalogút *K* kezdőpontja?



Megoldás. Jelölje *AK* hosszát *x*, ekkor *KB*=100-*x*. A Pitagorasz-tétel segítségével felírhatjuk a gyalogutat használók által megtett távolságot:
$x + \sqrt{(100-x)^2 + 50^2}$. Ez a mondottak értelmében 25%-kal kevesebb, mint az

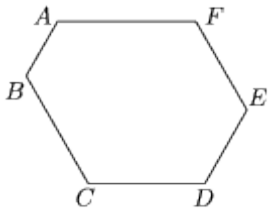
ABF útvonal hossza, ami 150 m. Ennek megfelelően $x + \sqrt{(100-x)^2 + 50^2} = 112,5$. Átrendezve és négyzetre emelve $(100-x)^2+50^2=(112,5-x)^2$. A zárójeleket felbontva x^2 kiesik, a kapott elsőfokú egyenletből x=6,25. Tehát a gyalogút az *A* ponttól 6,25 m-re indul. (Kömal, K.108)

Bizonyítás sokszögekben

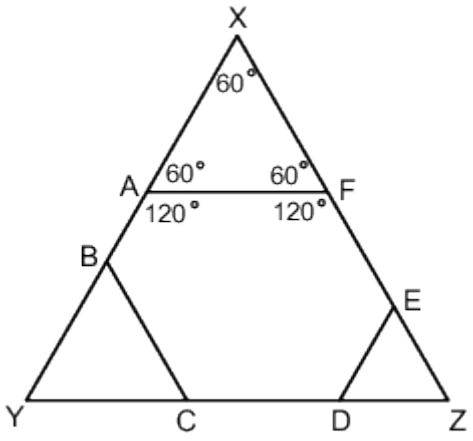
74. feladat:

Az *ábrán* látható hatszög minden belső szöge 120°-os. Bizonyítsuk be, hogy

$$AB + FA = CD + DE.$$



Megoldás:



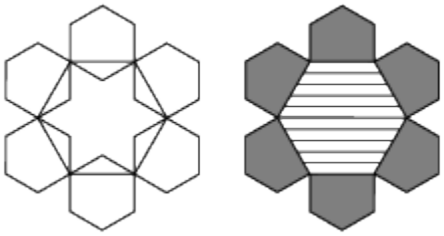
Ha a hatszög oldalait az ábrán látható módon meghosszabbítjuk, egy szabályos háromszöget kapunk, amelyből a hatszög szintén szabályos háromszögeket vág le. Tehát $FA = AX$ és $DE = DZ$, ahonnan $YX = YB + BA + FA$ és $YZ = YC + CD + DE$. Mivel $YX = YZ$ és $YB = YC$, az előző két egyenlőségből következik, hogy $BA + FA = CD + DE$. (Kömal K. 31)

75. feladat: Adott a síkon egy konvex hatszög, és a belsejében négy különböző pont úgy, hogy a hatszög csúcsai és az adott négy pont közül semelyik három nincs egy egyenesen. Vágjuk szét a hatszöget olyan háromszögekre, amelyek csúcsai a hatszög csúcsai és az adott négy pont közül valók (mind a 10 pontot fel kell használnunk). Mutassuk meg, hogy mindig 12 darab háromszöget kapunk.

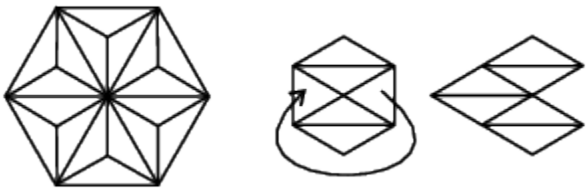
Megoldás: Számítsuk ki a kapott háromszögek szögeinek összegét! Ezek a szögek egyrészt a hatszög szögeit, másrészt pedig a belső pontok körüli teljesszöget „töltik ki", tehát összegük $720^o+4\cdot360^o=2160^o$, ami éppen 12 db háromszög szögeinek összege. Tehát 12 darab háromszög keletkezett. (Kömal, K.83)

Területszámítás sokszögekben

76. feladat: Egy cég emblémát terveztet magának. A tervező az alábbi, kétféle szabályos hatszög segítségével készült vázlatot rajzolta, majd ennek segítségével készítette a végleges javaslatot. Mekkora a szürke és a vonalkázott területek aránya (a második *ábrán*)?



Megoldás: A nagy hatszöget, és a kis hatszöget is daraboljuk fel az ábrán látható módon:



Az ábráról leolvasható, hogy a nagy hatszög területe 18 kis háromszög területével egyezik meg. A kis hatszög területe 6 kis háromszög területével egyezik meg, de a szürke részben egy-egy háromszög hiányzik a hatszögekből, tehát a szürke rész területe 30 db kis háromszög területével egyenlő. Így a szürke és vonalkázott területek aránya 30:18, azaz 5:3. (Kömal K.57)

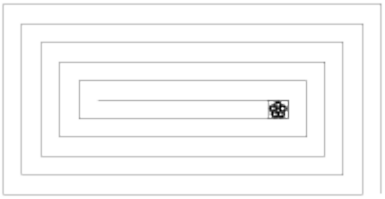
Számolás sokszögekben

77. feladat:

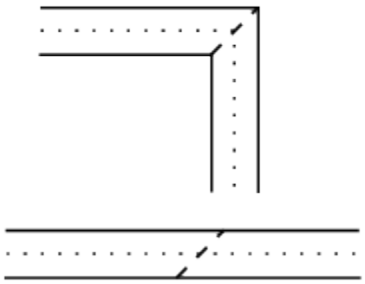
Határozzuk meg egy körbe írt nyolcszög négy olyan belső szögének az összegét, amelyek között semelyik kettő nem szomszédos!

Megoldás: Kössük össze a kör középpontját a sokszög csúcsaival, így kapunk 8 darab egyenlő szárú háromszöget. Ezek alapon fekvő szögei megegyeznek, és ezek közül minden háromszög esetén az egyik beleszámít a sokszög kiválasztott szögeinek összegébe, a másik pedig nem. Tehát a kiválasztott szögek összege akkora, mint a ki nem választottaké. A nyolcszög belső szögeinek összege 1080°, így a kiválasztott szögek összege ennek a fele, 540°. (Kömal K.38)

78. feladat: Egy Loire menti kastély 20×10 méteres téglalap alakú parkjában egy 1 méter széles szögletes „spirálút" vezet a kert belsejébe. A kastély ura minden reggel végigsétál a csigavonalú sétányon (az út közepén halad, és mindig derékszögben fordul) a csigavonal legvégéig, ott meglocsolja az 1×1 méteres virágágyban levő fehér margarétáit, majd visszasétál. Mekkora utat tesz meg ezalatt?



Megoldás:



Ha a csigavonalban lévő utat az ábrának megfelelően daraboljuk át minden saroknál - a levágott darabot átfordítva illesztjük a másikhoz; pontozott vonal jelöli a kastély urának útvonalát -, akkor egy 1 méter széles, 200 m^2 területű, téglalap alakú útsávot kapunk, melynek hosszúsága (az utolsó 1 métert nem számítva) megegyezik a kastély ura által megtett út hosszával. Az útsáv területéből kiszámítható a hossza, amely 200 méter, az utolsó 1 métert nem számítva 199 méter. Ezt az úr mindennap kétszer teszi meg (oda és vissza), tehát az által megtett teljes út hossza 398 méter. (Kömal K. 61)

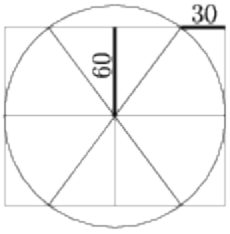
79. feladat: Az ábrán látható alakzatot öt egybevágó egyenlőszárú háromszögből és öt egybevágó négyzetből állítottuk össze. A tíz alakzat közül bármely kettőnek legfeljebb a határpontjai között lehetnek azonosak. Határozza meg az egyenlő szárú háromszögek belső szögeinek nagyságát!

(Arany Dániel 2007/2008. 1. forduló)

Megoldás: szolda.hu

Körrel kapcsolatos számolások

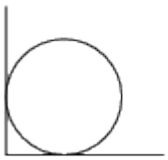
80. feladat: Egy város parkjában az *ábrán* látható sétaútrendszert akarják megépíteni. Összesen hány méter utat kell építeniük, ha az ábrán jelölt útszakaszok hossza 60, illetve 30 méter?



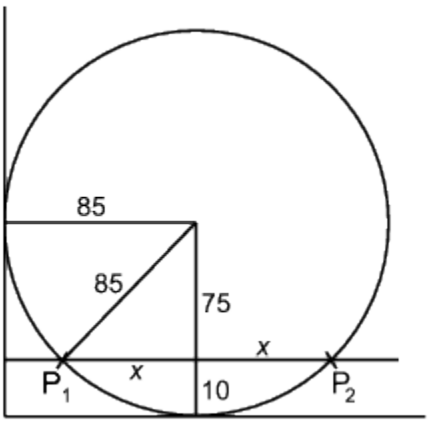
Megoldás: Legyen a kör sugara 30+x méter. Az x, 60, 30+x oldalú derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt: $x^2+60^2=(x+30)^2$, ebből x=45 méter. Az összes megépítendő út hossza tehát: $10\cdot 75+6\cdot 60+150\cdot \pi \approx 1581{,}24$ méter. (Kömal K. 52)

81. feladat:

Sanyiék a kör alakú asztalukat betolták a sarokba, felülnézetben látjuk az *ábrán.* Az asztallap átmérője 170 cm. Az asztallap szélének egy pontja az egyik faltól 10 cm-re van. Hány cm-re lehet ez a pont a másik faltól? (Kömal K.59)



Megoldás: A P pont két helyen is lehet az asztallap szélén. Az ábrán feltüntettük a megadott távolságokat cm-ben. Az ábra alapján a Pitagorasz-tételből $x^2=85^2-75^2=1600$, tehát x=40 cm. A P_1 pont távolsága a másik faltól 85-40=45 cm, a P_2 pont távolsága a másik faltól 85+40=125 cm.



82. feladat: Elhelyeztünk 2006 darab, egymást sorban kívülről érintő kis kört egy nagy körben úgy, hogy a kis körök középpontja a nagy kör adott átmérőjére illeszkedik, a kis körök átmérőinek összege pedig a nagy kör átmérőjével egyenlő. Milyen nagyságrendi viszony állapítható meg a kis körök kerületének összege és a nagy kör kerülete között?

Megoldás: A nagy kör sugara: r, a kis körök sugara: $r_1, \ldots, r_{2006}$, továbbá $r = r_1 + \ldots + r_{2006}$. A nagy kör kerülete $k=2r\pi$, a kis körök kerületének összege $k_1 + k_2 + \ldots + k_{2006} = 2r_1\pi + 2r_2\pi + \ldots + 2r_{2006}\pi = 2\pi(r_1 + r_2 + \ldots + r_{2006})$. Mivel a zárójeles összeg éppen r-rel egyenlő, ezért a kis körök kerületének összege és a nagy kör kerülete egyenlő. (Kömal, K.76)

Térgeometria

83. feladat: Van két, nem feltétlenül azonos méretű játékkockánk, melyek éleinek hossza egész szám. Egymásra tesszük ezeket úgy, hogy a felül levő kocka teljes lapjával érintkezzék az alul levő kocka egyik lapjával. Az így kapott test térfogatának mérőszáma megegyezik a felszínének a mérőszámával. Mekkorák az eredeti kockák élei?

Megoldás: Legyen az alul levő kocka éle a, a felül levőé b. A teljes lappal érintkezés csak úgy valósítható meg, ha $a \geq b$. A kapott test térfogata a^3+b^3, felszíne a két kocka felszínének összegéből kivonva az érintkező lap területének kétszerese: $6a^2+6b^2-2b^2$. A feladat szövege szerint $6a^2+6b^2-2b^2=a^3+b^3$, azaz $6a^2+4b^2=a^3+b^3$. Ha b értéke legalább 6, akkor a értéke is legalább 6, és ekkor $6a^2 \leq a^3$, $4b^2<b^3$, tehát $6a^2+4b^2<a^3+b^3$, így az egyenlőség nem állhat fenn. A b értéke tehát csak 1, 2, 3, 4 vagy 5 lehet. Vizsgáljuk meg külön az $a=b$ esetet! Ekkor $10a^2=2a^3$, azaz $a=b=5$ adódik. A továbbiakban csak az $a>b$ eseteket vizsgáljuk. Írjuk fel b lehetséges értékei esetén a megoldandó egyenletet! Figyelembe véve, hogy $a>b$,

alkalmazhatunk felső becslést, amelyből a lehető legnagyobb értéke kiderül! A kapott lehetséges értékeket megvizsgálva megtalálhatjuk az összes megoldást.

Ha b értéke 1, akkora a kapott egyenlet $6a^2+3=a^3$, ebből a becslés: $a^3=6a^2+3<7a^2$, ahonnan a maximális értéke 6, lehetséges értékei pedig 2, 3, 4, 5, 6; ezekből nincs egy megoldás sem.

Ha b értéke 2, akkor a a kapott egyenlet $6a^2+8=a^3$, ebből a becslés: $a^3=6a^2+8<7a^2$, ahonnan a maximális értéke 6, lehetséges értékei pedig 3, 4, 5, 6; ezekből niHa b értéke 3, akkor a a kapott egyenlet $6a^2+9=a^3$, ebből a becslés: $a^3=6a^2+9<7a^2$, ahonnan a maximális értéke 6, lehetséges értékei pedig 4, 5, 6; ezekből nincs egy megoldás sem. Ha b értéke 3, akkor a a kapott egyenlet $6a^2+9=a^3$, ebből a becslés: $a^3=6a^2+9<7a^2$, ahonnan a maximális értéke 6, lehetséges értékei pedig 4, 5, 6; ezekből nincs egy megoldás sem.

Ha b értéke 4, akkor a a kapott egyenlet $6a^2=a^3$, ebből a megoldás $a=6$.

Ha b értéke 5, akkor a a kapott egyenlet $6a^2-25=a^3$, ebből a becslés: $a^3=6a^2-25<6a^2$, ahonnan a maximális értéke 5, ekkor sincs megoldás.

Tehát két megoldás adódik: mindkét kocka éle 5 cm, vagy az egyiké 4, a másiké 6 cm. 8 Kömal, K.82)

84. feladat: Egy nagy kocka egységnyi élű kicsiny kockákból van összerakva. Közülük összesen 80 olyan van, amelyik a nagy kocka élein vagy csúcsaiban helyezkedik el. Hány kockából építettük a nagy kockát?

Megoldás: A nagy kocka csúcsaiban 8 kiskocka van, tehát a nagy kocka éleinek közepén (nem számítva a két szélső kockát) összesen 72 kiskocka van. Mivel 12 él van, ezért egy él közepén 6 kiskocka van. Tehát a nagy kocka éle 8 kiskockát tartalmaz, így a nagy kocka $8\cdot8\cdot8=512$ kiskockából áll. (Kömal , K.86)

85. feladat:

Ha egy téglatest összes éle mérőszámának összegéből levonjuk a felszínének mérőszámát, majd a kapott számhoz hozzáadjuk a téglatest térfogatának mérőszámát, 8-at kapunk. Bizonyítsuk be, hogy a téglatest egyik élének mérőszáma 2.

Megoldás: $8=4x+4y+4z-2(xy+xz+yz)+xyz$. Ha ebbe az egyenlőségbe pl. z helyére 2-t helyettesítünk, akkor azonosságot kapunk, tehát ha a téglatest egyik élének hossza 2, akkor a másik két él mindegy, mekkora. Ha pl. z helyébe $(2+a)$-t helyettesítünk, akkor a zárójelek felbontása és összevonás után a $0=a\cdot(xy-2x-2y+4)$ alakot kapjuk. A jobb oldali kifejezést szorzattá alakítva $0=a\cdot(x-2)\cdot(y-2)$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $a=0$ vagy $x=2$ vagy $y=2$, azaz ha valamelyik él hosszának mérőszáma 2.

Másképp: A $0=4x+4y+4z-2(xy+xz+yz)+xyz-8$ egyenletben a jobb oldali kifejezés szorzattá alakítható: $0=(x-2)(y-2)(z-2)$. Ez akkor 0, ha valamelyik él hossza 2. (Kömal. K.78)

86. feladat: Egy négyzetes oszlopnak van 49 cm^2 és 84 cm^2 területű lapja. Mekkora a térfogata?

Megoldás. Mivel egy négyzetes oszlopot legfeljebb kétféle téglalap határol, ezért két eset van: A) A négyzetes oszlop alaplapja – ami négyzet – 49 cm^2 területű. Ebben az esetben az alapél hossza 7 cm. A térfogatot kiszámolhatjuk az oldallap és a hozzá tartozó magasság (vagyis az alapél) szorzataként: $84 \cdot 7 = 588$ cm^3. B) A négyzetes oszlop alaplapja – ami négyzet – 84 cm^2 területű. Ebben az esetben az alapél hossza $2\sqrt{21}$ cm. A térfogatot kiszámolhatjuk az oldallap és a hozzá tartozó magasság (vagyis az alapél) szorzataként: $49 \cdot 2\sqrt{21} = 98\sqrt{21}$ cm^3. (Kömal K. 22)

87. feladat: Egy négyzet alapú hasáb éleinek hossza cm-ben mérve egész. Az alapjára merőleges, egyik oldallapjával párhuzamos vágással levágunk belőle egy 4 cm vastag részt. A megmaradt test térfogata 126 cm^3. Mekkorák az eredeti hasáb élei?

Megoldás: Legyen az eredeti hasáb alapéleinek hossza a cm, a másik élek hossza b cm. A levágás után megmaradó rész térfogata: $(a-4)\cdot a\cdot b=126=2\cdot 3^2\cdot 7$. A lehetséges szorzótényezők közül (1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126) csak a 14 és a 18, illetve a 7 és a 3 között 4 a különbség. Az első kettő együtt nem szerepelhet a szorzatban, mert 126 nem osztható 4-gyel. Tehát $a=7$, $b=6$ jöhet csak szóba, és ezek meg is felelnek. (Kömal, K.72)

88. feladat: Sebi és Vince fa építőelemekből tornyokat készítettek. Mindketten egyforma négyzet alapú hasábokból építkeztek, Sebi az építőelemeket a kisebb felületű lapjaik mentén rakta egymásra, míg Vince a nagyobb felületű oldalakat illesztette egymáshoz. Sebi négy elemből álló tornya pont ugyanolyan magasra sikerült, mint Vince hat elemű építménye. Milyen magasak a tornyok, ha az alapterületük összege 160 cm^2?

Megoldás: Legyen a hasáb négyzet alapjának oldala a, a hasáb magasságának hossza b.

Ha $a<b$, akkor $a^2<ab$, tehát a hasáb alapjának területe kisebb, mint a hasáb oldallapjának területe. Így a kisebb területű lapoknál négy hasábot egymásra rakva a kialakuló alakzat magassága $4b$, a nagyobb területű oldallapoknál hat hasábot egymásra rakva a kialakuló alakzat magassága $6a$.

Mivel az alapterületek összege $a^2+ab=160$, és a két torony egyforma magas, ezért $4b=6a$. Az egyenletrendszer megoldása $a=8$, $b=12$, így a tornyok magassága 48 cm.

Ha $a>b$, akkor $a^2>ab$, tehát a hasáb alapjának területe nagyobb, mint a hasáb oldallapjának területe. Így a kisebb területű lapoknál négy hasábot egymásra rakva a kialakuló alakzat magassága $4a$, a nagyobb területű lapoknál hat hasábot egymásra rakva a kialakuló alakzat magassága $6b$.

A most kapott egyenletrendszer $a^2+ab=160$, és $4a=6b$. Az egyenletrendszer megoldása $a=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$, $b=\frac{8\sqrt{6}}{3}$, s ekkor a tornyok magassága $16\sqrt{6}$ cm.

89. feladat:

a) Adjunk meg egy olyan sokszöglapokkal határolt testet, melynek 12 csúcsa és 18 éle van.

b) Létezik-e a sokszöglapokkal határolt testek között olyan, melynek 12 csúcsa és 16 éle van?

Megoldás. a) Például egy hatszög alapú egyenes hasáb.

b) Nem létezik ilyen test. Ugyanis minden csúcsból legalább 3 élnek kell kiindulnia, tehát az élek száma a csúcsoknál megszámolva legalább 36. Azonban minden élt mindkét végénél megszámoltunk, ezért az élek tényleges száma ennek fele, azaz legalább 18. Tehát nem létezik 12 csúcsú, 16 éllel rendelkező, sokszöglapokkal határolt test.

(Kömal.K.120)

90. feladat:

Két, henger alakú, egyforma magasságú tartály áll egymás mellett. Az egyik 4 m átmérőjű, és 12,5 m magasan áll benne a víz. A másik 3 m átmérőjű és üres. Az első tartályból a másodikba szivattyúzzuk át a vizet egy 10 m^3/perc teljesítményű szivattyúval. Hány perc múlva lesz egyforma magasan a két tartályban a víz?

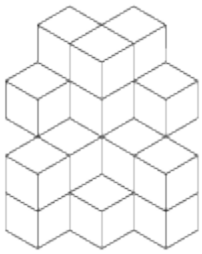
Megoldás. Tekintsük azt a helyzetet, amikor mindkét tartályban egyforma magasságban áll a víz, legyen ekkor a víz magassága *x* méter. Az első tartályból hiányzó, 12,5 – *x* méter magasságú vízoszlop került át a második tartályba, tehát $2^2 \cdot \pi \cdot (12{,}5-x)=1{,}5^2 \cdot \pi \cdot x$. Innen *x* = 8 méter. Az átkerült folyadék térfogata közelítőleg 56,6 m^3, amit 5,66 perc, vagyis 5 perc 40 másodperc alatt szivattyúzunk át. (Kömal K. 24)

91. feladat: Bociföldön két tejkimérés működik, mindkettőben lehet többek között habos kakaót is venni. Mindkét tejkimérésben ugyanolyan magas, henger alakú bögrébe mérik a habos kakaót. (A habos kakaó térfogatának fele folyékony kakaó, másik fele a kakaóhab.) Kis idő múlva a hab a térfogatának negyedrészével megegyező térfogatú kakaóvá alakul át. A Víg Tehénpásztorban 6 cm sugarú bögrékben adják a kakaót, és 12 petákot kérnek érte. A Jókedvű Csordásban 5 cm sugarú bögrék vannak, de ha az első töltés habja leülepedett, akkor még egyszer teletöltik a bögrét. Itt az ár 11 peták. Melyik tejkimérésben olcsóbb a kakaó?

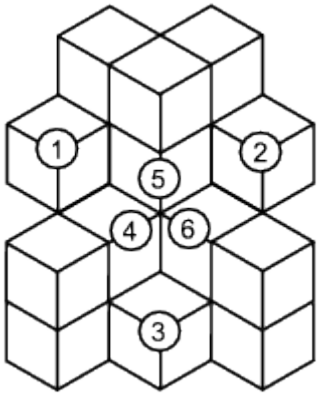
Megoldás: A Víg Tehénpásztorban a bögre térfogatának $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ része a kapott kakaó mennyisége. A Jókedvű Csordásban a bögre térfogatának $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{55}{64}$ része a kapott kakaó mennyisége. Legyen a bögrék magassága *h* cm! A Víg Tehénpásztorban a bögre térfogata köbcentiméterben mérve 36 $\pi\cdot h$, a kakaó mennyisége pedig $36\pi\cdot h\cdot\frac{5}{8}=\frac{45}{2}\cdot\pi\cdot h$, egy petákért $\left(\frac{45}{2}\cdot\pi\cdot h\right):12=\frac{15}{8}\cdot\pi\cdot h$ köbcenti jár. A Jókedvű Csordásban a bögre térfogata köbcentiméterben mérve 25 $\pi\cdot h$, a kakaó mennyisége pedig $25\pi\cdot h\cdot\frac{55}{64}=\frac{1375}{64}\cdot\pi\cdot h$, egy petákért $\left(\frac{1375}{64}\cdot\pi\cdot h\right):11=\frac{125}{64}\cdot\pi\cdot h$ köbcenti jár. Mivel $\frac{15}{8}=\frac{120}{64}<\frac{125}{64}$, ezért a Jókedvű Csordásban olcsóbb a kakaó. (Kömal K. 55)

92. feladat:

Az *ábrán* látható építményt úgy kaptuk, hogy egyforma méretű kockákat ragasztottunk össze. Két kocka összeragasztásához szükséges, hogy két lapjuk valamely mértékben átfedje egymást (tehát ha csak élben találkoznak, az nem elég). Határozzuk meg, hogy legalább hány kockából készíthető el az építmény.

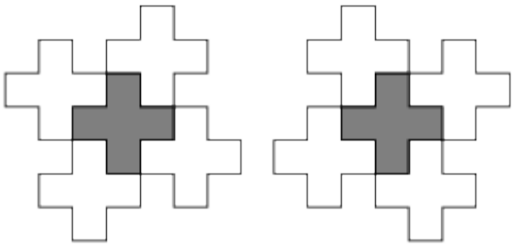


Megoldás: Az ábrán láthatunk 13 kockát, és nyilván vannak nem látható kockák, melyek egyben tartják a többit.



Az 1, 2, 3 jelű kockák rögzítéséhez darabonként egy nem látható kocka szükséges, ugyanis ezek távolsága akkora, hogy egy kocka nem tud közülük kettőhöz csatlakozni ragasztási felülettel. Össze kell még ragasztani a 4, 5 6 jelű kockákat is, ehhez kell egy kocka. Ez a kocka nem lehet az, amelyik pl. az 1-es kockát rögzíti, mert az 1, 4, 5 jelű kockáknak elhelyezkedésük miatt nem lehet egy (nem látható) kockával közös ragasztási felületük. Tehát legalább négy nem látható kocka szükséges a rögzítéshez. Ez elég is: a 4, 5, 6 jelű kockák a természetesen mögéjük kívánkozó, hozzájuk teljes oldallal csatlakozó kockával összeragaszthatók, az 1 és 2 jelű kockákat a hozzájuk, illetve az 5 jelű kockához teljes lappal csatlakozó egy-egy kockával rögzíthetjük, a 3 jelűt pedig hozzá és a 4-eshez vagy 6-oshoz teljes lappal csatlakozó kockával tudjuk felragasztani. Az építmény tehát legalább 17 kockából áll. (Kömal K. 60)

93. feladat: A poliminók a dominók mintájára épülnek fel: kis négyzetekből állnak, melyek mindig teljes oldallal csatlakoznak egymáshoz. Egy *P* poliminó „határoló-számának" azt a számot nevezzük, ahány különböző módon átfedés nélkül körülhatárolhatjuk a *P* egybevágó példányaival (minden éléhez csatlakoznia kell egy határoló poliminónak; a poliminót alkotó kis négyzeteknek teljes oldalukkal kell egy másik ilyen négyzethez csatlakozni). Például a kereszt alakzat határoló-száma 2, mert a következő két módon lehet körbehatárolni (a tükrözéssel egymásba vihető körülhatárolások is különbözőnek számítanak).



Adjuk meg a 3×3-as (vagyis 9 kis négyzetből álló) négyzet határoló-számát.

Megoldás: Egy 3×3-as négyzet egy oldalának lefedéséhez legfeljebb két 3×3-as négyzet elég. Az első négyzetet 3-féleképpen illeszthetjük az oldalhoz, és ez meghatározza a második helyét (ha kell második). A lefedett oldallal szemközti oldalt hasonlóan 3-féleképpen határolhatjuk, ekkor a két kimaradt oldalhoz már csak egyféleképpen tehetünk hozzá négyzetet. Ez eddig 9 különböző határolás, de ugyanezt elmondhatjuk a másik két oldalpárra is, ez már 18 eset, de azt az esetet, amikor minden oldalt csak egy négyzettel határolunk, kétszer számoltuk, így egyszer le kell vonni. Tehát 17-féleképpen lehet körülhatárolni a 3×3-as négyzetet önmagával. (Kömal, K. 80)

Algebra

Nevezetes azonosságok alkalmazása

94. feladat : . Igazold, hogy minden valós a,b,c esetén igaz:
$a^2+b^2+c^2 \geq$ ab+ ac+ bc !

Megoldás: Szorozzuk be 2-vel, és mindent a baloldalra rendezve a következő négyzetösszegeket kapjuk:

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$, ami mindig igaz.

95. feladat: Határozd meg a következő kifejezés minimumát: $x^2+y^2+2x-4y+6$
Megoldás: Alakítsál teljes négyzetté, akkor azt kapjuk, hogy
$(x+1)^2+(y-2)^2+1$ ez akkor minimális, ha x=-1 és y=2, és a minimum értéke 1.

96. feladat: Két kocka összes élének összege osztható 72-vel. Igazoljuk, hogy ekkor a térfogatösszegük osztható 6-tal. (Kömal C1111)

Megoldás. A kockák éleinek hossza legyen n és m. Ekkor az összes élük hossza $E=12m+12n$ osztható 72-vel, ami szerint $n+m$ osztható 6-tal. Térfogatösszegük $S=m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2)$: mivel olyan szorzat, melynek egyik tényezője 6 többszöröse, ezért S is osztható 6-tal.

97. feladat: Tudjuk, hogy valamely pozitív x valós számra $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Határozzuk meg x értékének kiszámítása nélkül $x^5+\frac{1}{x^5}$ értékét. (Kömal K. 329)

Megoldás. Használjuk $(x+\frac{1}{x})$ hatványait: $(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=7+2=9$, azaz ($x$ pozitív!) $x+\frac{1}{x}=3$. $(x+\frac{1}{x})^5=x^5+5x^3+10x+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}$, illetve $(x+\frac{1}{x})^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$. A harmadik hatványban felhasználva korábbi eredményünket $3^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\cdot 3$, ahonnan $x^3+\frac{1}{x^3}=27-9=18$. Ez felhasználva nézzük az ötödik hatványt: $3^5=x^5+\frac{1}{x^5}+5\cdot 18+10\cdot 3$, azaz $x^5+\frac{1}{x^5}=243-90-30=123$.

Egyenletmegoldás: O-át előállítjuk négyzetszámként, vagy négyzetek összegeként

98. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(x^2-4)^2(x+3)^2+(x+2)^2(x-9)^2=0$$

Megoldás: Két négyzetszám szorzata mindig nemnegatív, ezért a bal oldal csak akkor lehet 0, ha külön-külön teljesül az $(x^2-4)^2(x+3)^2=0$ és az $(x+2)^2(x-9)^2=0$ egyenlőség. Az első egyenlőség $x = 2; -2; -3$ esetén áll fenn, a második egyenlőség pedig $x = -2; 9$ esetén áll fenn. Mindkettő akkor teljesül, ha $x = -2$, tehát ez az eredeti egyenlet egyetlen megoldása. (Kömal K. 34.)

99. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^2 + 6 + \frac{1}{x^2} = 4x + \frac{4}{x}.$$

Megoldás. Nagyon gyorsan jutunk a megoldáshoz, ha észrevesszük, hogy $(x+1/x-2)^2=0$ alakra rendezhető az egyenlet ($x \neq 0$). Vagyis $x+1/x-2=0$, amiből $x^2-2x+1=0$, azaz $(x-1)^2=0$. Az egyedüli megoldás:$x=1$. (Kömal, K. 100)

Szöveges feladatok

100. feladat: A boltban papírzacskóba kérünk 5 szem savanyú cukrot, majd egy másik, ugyanolyan zacskóba 10 szemet. (Minden cukorszem tömege egyforma.) Az első zacskóra 85 grammot mérnek, a másodikra 165 grammot. Hány forintot fizetünk egy papírzacskóért (cukor nélkül számolva), ha egy kiló savanyú cukor ára 1200 Ft?

Megoldás: A két zacskó tömegének különbsége 5 szem cukor tömegét jelenti. Tehát 5 szem cukor tömege 80 gramm, így a zacskóé 5 gramm. Mivel a zacskót is tömege alapján, a savanyú cukor kilónkénti árából kiindulva fizetjük ki, annyit kell fizetnünk érte, amennyit 5 gramm savanyú cukorért, azaz 6 Ft-ot.

101. feladat: Egy iskola kilencedik évfolyamán négy osztály van. A négy osztály négynapos erdei iskola programon vett részt. Minden osztály egy nap túrázni ment, a többiek ekkor különböző foglalkozásokon, előadásokon vettek részt. Hétfőn az A osztály túrázott, ekkor 81-en, kedden a B osztály, ekkor 79-en, szerdán a C-sek, ekkor 75-en, csütörtökön pedig a D-sek, ekkor 80-an maradtak a táborban. Hány fős osztályok vannak az évfolyamon?

Megoldás: Adjuk össze az egyes napokon a táborban maradók létszámát. Mivel minden osztály háromszor volt bent, és egyszer kirándult, ezért minden tanulót pontosan 3-szor számolunk meg ebben az összegben. Így az összegként kapott 315 a tanulók számának háromszorosa, tehát 105 tanuló van összesen. Az egyes napokon a táborban maradók létszámát ebből kivonva megkapjuk a kiránduló osztályok létszámát. Ennek megfelelően az A-ban 24-en, a B-ben 26-an, a C-ben 30-an és a D-ben 25-en vannak. (Kömal, K.88)

102. feladat:

Egy nyomda olyan társasjátékot gyárt, amelyhez kEgy iskola kilencedik évfolyamán négy osztály van. A négy osztály négynapos erdei iskola programon vett részt. Minden osztály egy nap túrázni ment, a többiek ekkor különböző foglalkozásokon, előadásokon vettek részt. Hétfőn az A osztály túrázott, ekkor 81-en, kedden a B osztály, ekkor 79-en, szerdán a C-sek, ekkor 75-en, csütörtökön pedig a D-sek, ekkor 80-an maradtak a táborban. Hány fős osztályok vannak az évfolyamon? étféle figurára van szükség: kutyára és macskára; ezeket kartonpapírból kivágva készítik. Az egyes készletekben a macskák és kutyák aránya 5:3. Hogy a hulladékot minimalizálják, kétféle kartont nyomtatnak: az egyik fajta lapon 28 kutya és 28 macska van, a másikon pedig 42 macska. Milyen arányban nyomtassák a kétféle kartont, hogy a szétvágás után éppen megfelelő legyen a kétféle figura aránya?

Megoldás: Legyen a vegyes lapból kinyomtatott példányszám *x*, a csak macskás lapból kinyomtatott példányszám *y*. Ekkor a keletkező kutyák száma 28*x*, a keletkező macskák száma pedig 28*x*+42*y*. A két állatfigura számának aránya 5:3, tehát $\frac{28x+42y}{28x}=\frac{5}{3}$, innen kis átalakításokkal $\frac{x}{y}=\frac{9}{4}$. Tehát a kívánt darabszámok eléréséhez a vegyes és csak macskás kinyomtatott lapok számának helyes aránya 9:4. (Kömal K. 54)

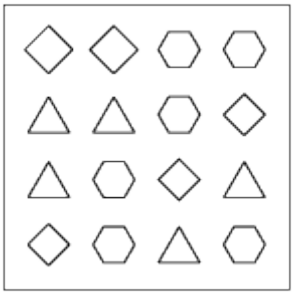
103. feladat: Egy osztályban a gyerekek kettesével ülnek, és a padtársak közül pontosan az egyiküknél van minden matek órán matematika feladatgyűjtemény. Másik jellegzetessége az osztálynak, hogy bármely két tanuló esetén van egy harmadik társuk, aki pontosan akkor hozza el a matematika feladatgyűjteményét, ha a két tanulótársa is.

Egyik nap begurult a matek tanár, és azt mondta: „ebben az osztályban nincs olyan tanuló, aki minden nap matematika feladatgyűjteménnyel jönne a matek órára".

Helyes volt-e ez a megjegyzése a tanárnak? (Arany Dániel 2008/2009 . 1. forduló)

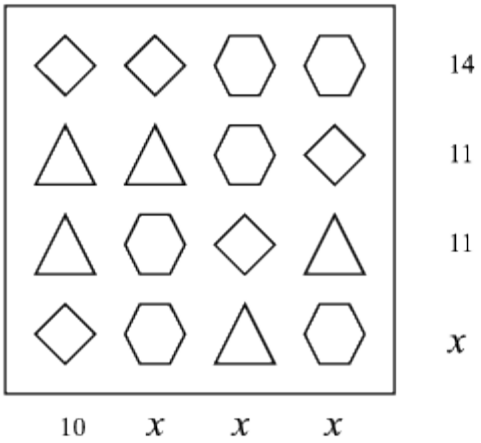
Megoldás: szolda.hu

104. feladat: Egy dobozba három különböző csokoládéból 16 darabot csomagolnak. Az *ábra* mutatja a különböző csokoládék elhelyezkedését.



Az első sorban a négy csokoládé tömege 14 dkg, a második sorban 11 dkg, az első oszlopban pedig 10 dkg. Hány dekagramm csokoládét vásárolunk, ha megvesszük mind a tizenhatot?

Megoldás. A harmadik sor tömege is 11 dkg. Az ismeretlen negyedik sor, továbbá a második, harmadik és negyedik oszlop tömege azonos.



Vagyis $10+3x=14+11+11+x$, amiből $x=13$. A dobozban 49 dkg csokoládé van.(Kömal, K. 99)

105. feladat: Háromféle dobozunk van: kicsi, közepes és nagy (az azonos méretű dobozok nem rakhatók egymásba). Kitettünk 11 nagy dobozt az asztalra, majd néhányat ezek közül üresen hagytunk, a többibe pedig 8-8 közepes dobozt tettünk. A közepes dobozok közül is üresen hagytunk néhányat, a többi mindegyikébe pedig 8 (üres) kis dobozt tettünk. Így most 102 üres doboz van az asztalon. Hány doboz van összesen az asztalon?

Megoldás. Amikor egy nagyobb dobozba 8 kisebbet teszünk, akkor az üres dobozok száma 7-tel nő, így ha először x, majd y dobozba teszünk 8 kisebbet, akkor az üres dobozok száma $11+x\cdot 7+y\cdot 7=102$, ahonnan $x+y=13$, azaz $13\cdot 8+11=115$ doboz van összesen az asztalon. (Kömal, K.104)

106. feladat: Három nyuszi ül a fűben, mindegyikük előtt egy kupac répa, összesen 36. Ha egyazon pillanatban az első nyuszi átadná a másodiknak répái harmadát, a második a harmadiknak répái negyedét és a harmadik az elsőnek a répái ötödét, mindenkinek ugyanannyi répája lenne, mint kezdetben volt. Melyik nyuszinak hány répája van?

Megoldás: Ahhoz, hogy mindenkinek annyi répája legyen a végén, mint az elején, az kell, hogy mindenki ugyanannyit adjon, mint amennyit kap, azaz

$$1/3\ E=1/4\ M=1/5\ H \rightarrow 3/5\ H+4/5\ H+H=36,$$

ahonnan $H=15$, $M=12$, $E=9$. (Kömal K. 123)

107. feladat: Vettünk öt különböző pozitív egész számot, és páronként összeszorozva őket az alábbi értékeket kaptuk: 6, 10, 15, 24, 36, 42, 60, 105, 63, 252. Melyek ezek a számok? (Kömal K 219)

Megoldás. A keresett számötös: 2, 3, 5, 12, 21.

Százalékszámítás

108. feladat: Egy kereskedő 6000 Ft-ért megvett egy árut. Milyen árat írjon rá, hogy abból 10%-ot engedve, a befektetéséhez képest 20%-os haszonra tegyen szert?

Megoldás: Ha a keresett ár x, akkor $0{,}9x=1{,}2\cdot 6000$. Innen $x=8000$ (Ft). (Kömal K. 70)

Átlagszámítással kapcsolatos példák

109. feladat: Két diák beszélget iskola után:

-- Mennyi a szeptemberben kapott jegyeid átlaga informatikából?

-- Pontosan 4,6.

-- Az nem lehet, hisz még csak most kezdődött el a tanév. Nem lehet még ennyi jegyed!

Mire gondolhatott a kétkedő diák?

Megoldás: A jegyek átlagát úgy számoljuk ki, hogy összeadjuk a jegyeket, és az összeget elosztjuk a jegyek számával. Az első diák állítása szerint:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 4{,}6,$$

ha n db jegyet szerzett eddig. Ezt átalakítva: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 4{,}6 \cdot n$. Az összeg minden tagja egész szám, ezért a jobb oldal egész. Ez csak akkor teljesül, ha n az 5 többszöröse. Tehát legalább öt jegye kell, hogy legyen a diáknak, ami egyetlen tantárgyból egy hónap alatt tényleg nem valószínű. (Ennyi jeggyel meg is valósítható a 4,6-os átlag, pl.: 4 db 5-ös és 1 db 3-as, vagy 3 db 5-ös és 2 db 4-es jeggyel). (Kömal K.43.)

110. feladat:

Egy 26 fős osztály legutóbbi matematika dolgozatairól a következőket tudjuk:

- 20 tanulónak közepesnél nem jobban,

- 14-nek közepesnél nem gyengébben sikerült.

- A közepesnél jobbak dolgozatainak átlaga 4,33;

- a közepesnél gyengébbek dolgozatainak átlaga 1,83;

- nem hiányzott senki a dolgozat írásakor.

(Az átlagok két tizedes kerekítéssel értendők.)

Mennyi az osztályátlag? (Arany Dániel 2008/2009. 1. forduló)

Megoldás: szolda.hu

Teleszkópikus összegek számolása

111. feladat: Adjuk meg két egész szám hányadosaként az alábbi összeget:

$$\frac{4}{1989\cdot 1993}+\frac{4}{1993\cdot 1997}+\frac{4}{1997\cdot 2001}+\frac{4}{2001\cdot 2005}$$

Megoldás: Az első törtet felírhatjuk két tört különbségeként: $\frac{4}{1989\cdot 1993}=\frac{1}{1989}-\frac{1}{1993}$. Hasonlóan felírva a többit is, a négytagú összeget így írhatjuk más alakban:

$$\frac{1}{1989}-\frac{1}{1993}+\frac{1}{1993}-\frac{1}{1997}+\frac{1}{1997}-\frac{1}{2001}+\frac{1}{2001}-\frac{1}{2005}=$$

$$\frac{1}{1989}-\frac{1}{2005}=\frac{2005-1989}{1989\cdot 2005}=\frac{16}{3987945}.$$ (Kömal K. 64)

Sorozatok

Egymás utáni számok összegének kiszámolása, ennek alkalmazása

112. feladat: Egy gombfoci-bajnokságon 15 csapat vett részt, és minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzött meg. Győzelemért 3, döntetlenért 2, vereségért 1 pont járt. A verseny végén minden csapatnak más pontszáma volt; az utolsó helyezett 21 pontot szerzett. Bizonyítsuk be, hogy a legtöbb pontot szerzett csapat legalább egyszer döntetlenül mérkőzött.

Megoldás: Minden mérkőzésen összesen 4 pontot osztanak ki a résztvevő csapatok között az eredménytől függetlenül. Így a csapatok által összesen megszerezhető pontok száma a mérkőzések számának négyszerese. A mérkőzések száma $\frac{15\cdot 14}{2}=105$, tehát a csapatok összes pontszáma 420. Ha minden csapatnak különböző pontja van, akkor a csapatoknak legalább $21+22+23+\ldots+35$ pontja van összesen, ez viszont (pl. a Gauss módszerrel összeadva) éppen 420. Tehát a végeredmény csak az lehet, hogy a csapatoknak $21, 22, \ldots 35$ pontja van a helyezések

sorrendjében. Így az elsőnek 35 pontja van. A pontszám viszont csak a győzelmekért járó 3 pontokkal és a vereségekért járó 1 pontokkal nem lehet páratlan, mert 14 páratlan szám összege páros. Így az első helyezett biztosan játszott döntetlent. (Kömal: K.49)

113. feladat: Hány olyan legalább két elemű számhalmaz van, amely egymást követő pozitív egész számokból áll, és amelyben az elemek összege 100?

Megoldás: Ha egymást követő számok összege páros, akkor közöttük páros számú páratlan számnak kell szerepelnie. A továbbiakban két esetet kell megvizsgálnunk:

a) Páros darab egymást követő számot adunk össze. Ekkor a mondott feltétel csak abban az esetben teljesül, ha a számok darabszáma 4-gyel is osztható (azaz $4, 8, 12, \ldots$ darab számot adunk össze, így köztük $2, 4, 6, \ldots$ darab páratlan szám van.) Négy egymást követő szám összege $a+a+1+a+2+a+3=4a+6$. Ez nem lehet 100, mert nem osztható 4-gyel. Nyolc egymást követő szám összege hasonlóan kiszámítva $8a+28$, ha ez 100, akkor $a=9$; a számhalmaz {9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16}. 12 egymást követő szám összege hasonlóan kiszámítva $12a+66$. Ez nem lehet 100, mert nem osztható 4-gyel. 16 vagy több egymást követő szám összege pedig nem lehet 100, mert már a 16 legkisebb egymást követő pozitív egész szám összege is több, mint 100.

b) Páratlan darab egymást követő számot adunk össze. Ekkor a számok összege a középső szám annyiszorosa, ahány számról szó van. Ha a számok összege 100, akkor tehát a középső számnak a 100 többszöröse, méghozzá páratlanszorosa. Így a középső szám lehetséges értékei: 4 és 20. A 4 esetén 25 számról lenne szó, de ezek között negatívok is lennének, tehát ez nem ad megoldást. A másik esetben a {18, 19, 20, 21, 22} számhalmazt kapjuk. Tehát két olyan számhalmaz van, amely megfelel a feltételeknek. (Kömal K. 51)

Periódikus sorozatok

114. feladat: 3, 6, 12, 5, 10,... számsorozat elemeit a második elemtől kezdve úgy kaptuk, hogy az előző elem egyes helyiértéken álló számjegyének kétszeresét hozzáadtuk ahhoz a számhoz, amit ennek a számjegynek az elhagyásával kaptunk. Mi lesz a sorozat 2007-dik eleme? (Arany Dániel 2007/2008 . 1. forduló)

Megoldás: szolda.hu

115. feladat: Az angol ABC betűit (ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ) piramis formában leírjuk úgy, hogy minden sorba eggyel több betűt írunk, mint az előző sorba. Amikor a Z-hez érünk, akkor ismét az A, B, C, ...betűk következnek. Hányadik soroknál fordul elő először, hogy két egymás követő sor M betűvel végződik? Hányadik sor végén lesz M betű először?

Megoldás. Az M betűig 13 betű van, az ABC pedig 26 betűből áll, ami a 13 többszöröse. Így az első kérdésre a válasz egyszerű. Ha mindkét sor végén M betű áll, akkor a második M betű végű sorban minden betűnek ismétlődnie kell néhányszor, hogy ismét az M legyen az utolsó betű. A legegyszerűbb, ha egyszer ismétlődik minden, azaz 26 betű van a sorban, és így a 26. sorban vagyunk. Mivel $1+2+\ldots+25=26\cdot 252$ osztható 13-mal, így a 25. és 26. soroknál fordul elő először, hogy két egymást követő sor M-mel végződik.

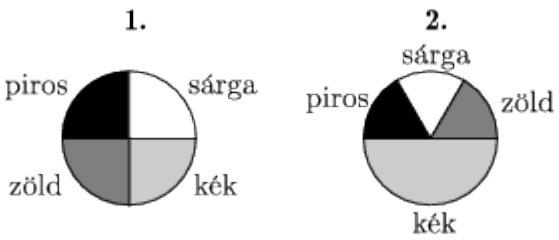
A piramis n-edik sorának végén az ismétlődő ABCD...XYZABC... betűsor $1+2+\ldots+n=n(n+1)2$-edik betűje áll. Az M az ABC-ben a 13. betű, és az ABC hossza $26=2\cdot 13$, így egyrészt $13|n(n+1)2$, másrészt ez utóbbi szám a 13-nak páratlan számú többszöröse kell, hogy legyen. Mivel 13 prímszám, így a legkisebb két eset az $n=12$ és az $n=13$. Ha $n=12$, akkor $n(n+1)2=6\cdot 13$, ami 13-nak páros számú többszöröse. Ha $n=13$, akkor $n(n+1)2=7\cdot 13$. Tehát a 13. sor végén áll először M betű. (Kömal K.388)

Valószínűségszámítás

116. A karácsonyfán már csak 5 szem szaloncukor van: két zselés és három marcipános, de az ízük a csomagoláson nem látszik. Hanga elhatározta, hogy minden nap meg fog enni egyet közülük. Mi a valószínűbb: hogy a harmadik napon eszi meg a második zseléset, vagy hogy a negyedik napon a harmadik marcipánosat?

Megoldás: Ha Hanga a harmadik napon eszi meg a második zseléset, akkor az elsőt az első két nap valamelyikén kell, hogy megegye, ez 2 lehetőség az összesből. Ha a harmadik marcipánosat a negyedik napon eszi meg, akkor az első kettőt az első három napon kell megennie, azaz csak egy olyan nap volt eddig, amikor zseléset evett, erre 3 lehetősége volt az összesből. Azaz valószínűbb, hogy a negyedik napon eszi meg a harmadik marcipánosat. (Kömal K. 66)

117. feladat: Az *ábrán* kétféle festékesdoboz látható. Anna, Balázs, Csilla és Dalma úgy keverik ki a festéket a tojásfestéshez, hogy becsukott szemmel kétszer egymás után belemártják ecsetjüket valamelyik doboz valamelyik rekeszébe, és az így kapott keverékszínt viszik a tojásra. Anna mindkétszer az első, Balázs mindkétszer a második, Csilla először az első, majd a második, Dalma először a második, majd az első dobozba mártja ecsetjét. Melyikük kapja a legkisebb eséllyel a kék és piros keverékeként adódó lila színt?



Megoldás: Mind a négyen úgy kaphatnak lilát, ha először a kékbe, utána a pirosba, vagy először a pirosba, utána a kékbe nyúlnak ecsetjükkel. Ha Anna elsőre a kékbe nyúl, ami az estek 1/4-ében fordul elő, akkor másodszorra a pirosba kell nyúlnia, aminek szintén 1/4 az esélye, így lilát 1/16-od valószínűséggel kap, mivel a fordított sorrend esélye is ugyanennyi,

összességében 1/8 eséllyel kever ki lilát. Balázs 1/6 eséllyel nyúl elsőre a pirosba, utána 1/2 eséllyel a kékbe, így ennek a valószínűsége 1/12, de a fordított sorrend is jó, így összességében 1/6 az esélye a lila színre. Csilla elsőre 1/4 eséllyel nyúl a pirosba, másodikra 1/2 eséllyel a kékbe, ill. elsőre 1/4 eséllyel a kékbe, másodikra 1/6 eséllyel a pirosba, azaz Csilla esélye a lilára: 1/8+1/24=1/6. Dalma ugyanazt teheti, mint Csilla, csak fordított sorrendben, így neki is 1/6 az esélye. A legkisebb eséllyel tehát Anna kap lilát. (Kömal, K.75)